Уральский федеральный университет
имени первого Президента России Б.Н.Ельцина
Уральский энергетический институт

УСТОЙЧИВОСТЬ И ОПТИМАЛЬНАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Учебное пособие

Министерство образования и науки Российской Федерации
Уральский федеральный университет
имени первого Президента России Б. Н. Ельцина

УСТОЙЧИВОСТЬ И ОПТИМАЛЬНАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Учебное пособие

Рекомендовано методическим советом УрФУ для студентов, обучающихся по направлению подготовки — Прикладная математика

Екатеринбург
Издательство Уральского университета
2016

УДК 517.9(075.8)
ББК 22.161.6я73
У81

Авторы: Б. Г. Гребенщиков, Н. В. Гредасова, А. Б. Ложников, О. Г. Матвийчук, А. Н. Сесекин

Рецензенты:

завкафедрой прикладной математики УрГЭУ, канд. физ.-мат. наук, доц. Ю. Б. Мельников;

ведущий научный сотрудник, д-р физ.-мат. наук Ю. И. Бердышев (Институт математики и механики Уральского отделения РАН)

Научный редактор — д-р физ.-мат. наук, проф. А. Ф. Шориков

У81 Устойчивость и оптимальная стабилизация систем дифференциальныхуравнений: учебное пособие / Б. Г. Гребенщиков, Н. В. Гредасова, А. Б. Ложников, О. Г. Матвийчук, А. Н. Сесекин. — Екатеринбург : Изд–во Урал. ун-та, 2016. — 120 с.

ISBN 978-5-7996-1791-2

Приведено понятие устойчивости по Ляпунову. Сформулированы и доказаны основные теоремы об устойчивости, асимптотической устойчивости и неустойчивости. Дана геометрическая интерпретация метода функций Ляпунова. Отдельно исследованы вопросы устойчивости для линейных систем. Рассмотрены задачи стабилизации. Исследована задача устойчивости и стабилизации консервативных механических систем. Изучены асимптотические свойства разностных систем. Приведены примеры применения разностных систем при исследовании свойств дифференциальных уравнений. Приведена задача стабилизации разностных систем. Рассмотрены иллюстрирующие примеры.

Учебное пособие предназначено для студентов направления — Прикладная математика, а также для студентов, аспирантов и специалистов, интересующихся задачами теории устойчивости.

Библиогр.: 26 назв. Рис. 20.

УДК 517.9(075.8)
ББК 22.161.6я73

ISBN 978-5-7996-1791-2

Оглавление

Введение

Вопрос об устойчивости движения возник из практики. Дело в том, что обычно для описания какого-либо явления пользуются его приближенной моделью. Кроме того, и начальные данные бывают известны неточно. При построении математической модели учитывается влияние лишь основных возмущающих сил, а влиянием малых, второстепенных — пренебрегают. В такой ситуации встает вопрос: а будут ли в реальной ситуации иметь место те свойства, которые были установлены на упрощенной математической модели, или неточности в начальных данных, малые возмущения внешних воздействий в состоянии качественно изменить свойства системы. Со временем, когда стали исследоваться управляемые системы, стало естественным рассматривать вместо вопроса об изучении свойства устойчивости системы вопрос о том, как нужно управлять системой, чтобы обеспечить ей свойство устойчивости. Управления, решающие такие задачи, называют стабилизирующими, а рассматриваемая задача называется задачей стабилизации. Последняя имеет большое практическое значение при конструировании систем автоматического регулирования.

Глава 1

Устойчивость и стабилизация систем обыкновенных дифференциальных уравнений

1. Определение устойчивости по Ляпунову

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений, записанную в векторной форме:

$$\dot{x} = f(t, x), \tag{1.1}$$

где $t \in \mathrm{R}^1$, $x \in \mathrm{R}^n$, R^m — евклидово пространство размерности m. Далее для простоты будем векторное дифференциальное уравнение (1.1) называть просто дифференциальным уравнением. При определенных условиях на вектор-функцию $f(t, x)$ (например, непрерывность вектор-функции $f(t, x)$ по t, x и существование ограниченных частных производных в рассматриваемой области по x_i) в некоторой окрестности точки t_0 существует единственное решение этого уравнения, удовлетворяющее начальному условию $x(t_0) = x^0$. Заметим, что решение может существовать не для всех $t \in [t_0, \infty)$, а только на некотором конечном промежутке. Если же решение определено для всех $t \in [t_0, \infty)$, то такое решение будем называть продолжаемым. Соответствующие теоремы, обеспечивающие существование и продолжаемость решений дифференциального уравнения (1.1), можно найти, например в [2]. Выберем некоторое движение $x = g(t)$ системы (1.1) и будем называть его невозмущенным движением.

Определение 1. *Невозмущенное движение $x = g(t)$ назовем устойчивым по Ляпунову, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что из неравенства $||x_0 - g(t_0)|| < \delta$ следует выполнение неравенства*

$$||x(t) - g(t)|| < \varepsilon$$

при всех $t > t_0$.

Здесь через $x(t)$ обозначено решение системы (1.1), удовлетворяющее начальному условию $x(t_0) = x_0$.

Определение 2. *Движение $x = g(t)$ назовем асимптотически устойчивым по Ляпунову, если оно устойчиво по Ляпунову и существует такое положительное число h, что при выполнении условия $||x_0 - g(t_0)|| < h$ следует, что*

$$\lim_{t\to\infty} ||x(t) - g(t)|| = 0.$$

Движение называется неустойчивым, если оно не является устойчивым.

Такое определение устойчивости было введено выдающимся русским математиком Александром Михайловичем Ляпуновым [14]. Эта работа явилась революционной для качественной теории дифференциальных уравнений.

Сделаем в уравнении (1.1) замену переменных $y = x - g(t)$. Относительно новой переменной получится следующее уравнение:

$$\dot{y} = f(t, y + g(t)) - f(t, g(t)).$$

Введя обозначение $F(t, y) = f(t, y + g(t)) - f(t, g(t))$, получим систему

$$\dot{y} = F(t, y). \tag{1.2}$$

Заметим, что $F(t, 0) = 0$, а это означает, что $y(t) = 0$ является решением уравнения (1.2). Тривиальное решение $y(t) = 0$ соответствует решению $x = g(t)$ уравнения (1.1). В результате задача устойчивости движения $x = g(t)$ для (1.1) трансформируется в задачу устойчивости тривиального решения для (1.2). Определения устойчивости, асимптотической устойчивости и неустойчивости очевидным образом переформулируются из вышеприведенных определений.

2. Метод функций Ляпунова

А. М. Ляпунов в работе [14] предложил два метода для исследования задачи об устойчивости движения. В данном разделе мы остановимся на методе функций Ляпунова.

Рассмотрим скалярно значную функцию $V(y)$ векторного аргумента y, принимающего значения в R^n. Будем предполагать, что эта функция определена в некоторой окрестности начала координат D и обладает в этой области непрерывными частными производными по y_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Определение 3. *Функция $V(y)$ называется определенно-положительной в области D, если всюду в этой области, кроме начала координат, $V(y)$ принимает положительные значения и $V(0) = 0$. Если же всюду в этой области за исключением начала координат $V(y) < 0$ и $V(0) = 0$, то функция называется определенно-отрицательной.*

Определение 4. *Если же в области D всюду выполняется неравенство $V(y) \geq 0$ или $V(y) \leq 0$, то функция называется знакопостоянной (в первом случае — знакоположительной, а во втором — знакоотрицательной).*

Определение 5. *Если же функция $V(y)$ в любой окрестности точки $y = 0$ принимает как положительные, так и отрицательные значения, то $V(y)$ называется знакопеременной функцией.*

Проиллюстрируем эти понятия на примерах. Функция $V(y) = y_1^2 + y_2^2$, определенная в R^2 , является определенно-положительной, функция $V(y) = y_1^2$, определенная в R^2, является знакоположительной, а функция $V(y) = y_1^2 - y_2^2$ в том же пространстве является знакопеременной.

Часто в качестве функции $V(y)$ используют квадратичную форму вида

$$V(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} y_i y_j, \quad a_{ij} = a_{ji}. \tag{1.3}$$

Составим матрицу коэффициентов этой квадратичной формы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... \\ a_{n1} & ... & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{1.4}$$

и рассмотрим определители

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & ... & a_{1k} \\ ... & ... & ... \\ a_{k1} & ... & a_{kk} \end{vmatrix}, \quad k = 1, 2, ..., n. \tag{1.5}$$

Если при всех допустимых k определители $\Delta_k > 0$, то квадратичная форма (1.3) будет определенно-положительной. Приведенное условие называется *критерием Сильвестра* [16].

Далее для простоты будем предполагать, что правая часть дифференциального уравнения (1.2) не зависит от t, т. е. уравнение имеет вид

$$\dot{y} = F(y). \tag{1.6}$$

В таком случае говорят, что дифференциальное уравнение является *автономным*.

Приведем три основные теоремы А. М. Ляпунова об устойчивости, асимптотической устойчивости и неустойчивости.

Сначала введем одно вспомогательное понятие. Выражение

$$\dot{V} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V(y)}{\partial y_i} F_i(y) \tag{1.7}$$

называется *производной функции Ляпунова в силу системы.*

Определение 6. *Поверхность $V(y) = c$ называется замкнутой относительно точки O , если на любой непрерывной линии, соединяющей точку O с точкой границы области D, имеется, по крайней мере, одна точка, в которой $V(y) = c$.*

Лемма 1. *Если функция $V(y_1, \ldots, y_n)$ знакоопределенная, то существует такое положительное число h , что все поверхности уровня $V = c$, где $|c| < h$, являются замкнутыми относительно точки O поверхностями.*

Доказательство. Предположим для определенности, что $V(y) > 0$ при $y \neq 0$ и рассмотрим шар J_R с центром в начале координат и радиусом, равным R. Предположим, что функция V определена на этом шаре. Обозначим границу шара через S_R. Так как функция V непрерывна, то на замкнутом ограниченном множестве S_R — границе шара эта функция достигает своего минимального значения, которое будем обозначать через h.

Соединим теперь начало координат (точку 0) с какой-либо точкой p, принадлежащей границе S_R , некоторой непрерывной линией $y = y(s)$. Так как в начале координат функция V равна нулю, а $V(p) \geq h$, и функция V непрерывна вдоль непрерывной кривой $y = y(s)$, то на кривой $y = y(s)$ найдется такая точка $\bar{y} = y(\bar{s})$, в которой функция $V(s)$ примет значение $V(\bar{s}) = c$. Следовательно, внутри шара $\overline{J_R}$ лежит замкнутая часть поверхности $V(y) = c$ $(0 < c < h)$. □

Теорема 1 (теорема Ляпунова об устойчивости). *Если в области D для системы* (1.6) *существует знакоопределенная функция $V(y)$, производная которой в силу системы* (1.6) *является знакопостоянной функцией знака, противоположного знаку функции $V(y)$, то положение равновесия устойчиво по Ляпунову.*

Доказательство. Обозначим через J_ε внутренность шара радиуса ε с центром в начале координат, а через S_ε — границу шара (сферическую поверхность). Для определенности предположим, что $V(y)$ будет определенно положительной функцией. Пусть ε таково, что J_ε лежит в области D, и пусть l — минимальное значение функции $V(y)$ на сфере S_ε. Выберем $\delta > 0$ таким, чтобы в точках шара J_δ выполнялось неравенство $V(y) < l$ (что сделать всегда можно в силу непрерывности функции $V(y)$ и условия $V(0) = 0$). Выберем произвольную точку p на J_δ. Рассмотрим траекторию $f(p,t)$ системы (1.6), выходящую из точки p , и допустим, что она пересечет сферу S_ε в некоторой точке q. Так как

$$\dot{V} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial y_i} F_i \le 0,$$

то функция $V(y)$ не возрастает вдоль траектории, и поэтому будем иметь

$$V(q) \le V(p) < l.$$

Но в силу того, что l — минимум функции $V(y)$ на S_ε, должно выполняться неравенство $V(q) \ge l$. Из полученного противоречия следует, что точка $f(p,t)$ с ростом времени t не выйдет за пределы сферы S_ε. □

Теорема 2 (теорема Ляпунова об асимптотической устойчивости). *Если в области D для системы* (1.6) *существует знакоопределенная функция $V(y)$, производная которой в силу системы* (1.6) *будет тоже знакоопределенной функцией, знака, противоположного знаку функции $V(y)$, то положение равновесия асимптотически устойчиво по Ляпунову.*

Доказательство. Будем предполагать для определенности, что функция $V(y)$ является определенно-положительной функцией. Пусть число R таково, что $\overline{J_R}$ лежит в области D.

Из предыдущей теоремы следует, что положение равновесия (начало координат) будет устойчивым. Поэтому существует такое $r > 0$, что если точка $p \in J_r$, то точка $f(p,t)$ не выйдет из шара J_R. Пусть ε — положительное сколь угодно малое число. Согласно предыдущей теореме, мы вновь можем указать число $\delta > 0$ такое, что из условия $p \in J_\delta$ будет следовать $f(p,t) \in J_\varepsilon$ при $t > 0$. Пусть $p \in J_\varepsilon$. Предположим, что точка $f(p,t)$ не попадет при $t > 0$ в шар J_δ. Тогда полутраектория $f(p,t)$ при $t > 0$ будет лежать в шаровом слое $\overline{J_R} \backslash J_\delta$. Поскольку в этом шаровом слое выполняется условие $\dot{V} < 0$, то существует постоянная $m > 0$ такая, что будет выполняться неравенство

$$\dot{V} < -m \tag{1.8}$$

во всех точках указанного слоя. Из равенства

$$V(f(p,t)) = V(p) + \int_0^t \dot{V} dt$$

в силу предположения (1.8) мы получаем неравенство

$$V(f(p,t)) < V(p) - mt.$$

Устремляя в последнем неравенстве t к бесконечности, видим, что правая часть неравенства становится отрицательной, что и приводит нас к противоречию в связи с тем, что в левой части этого неравенства стоит неотрицательное значение функции Ляпунова. Полученное предположение доказывает теорему. □

Теорема 3 (теорема Ляпунова о неустойчивости). *Если существует функция $V(y)$, производная которой в силу системы* (1.6) *является знакоопределенной функцией, в любой окрестности начала координат функция $V(y)$ не является знакопостоянной знака, противоположного с $\dot{V}$, то тривиальное решение уравнения* (1.6) *неустойчиво по Ляпунову.*

Доказательство. Предположим, что в шаре J_ε выполнены условия теоремы. Для определенности будем считать функцию $\dot{V}$ определенно-положительной. Рассмотрим сколь угодно малую окрестность J_δ начала координат. Покажем, что существует точка p и выпущенная из нее траектория при $t > 0$ выйдет за пределы J_ε. В силу условий теоремы в J_δ существует точка p, в которой $V(p) = V_0 > 0$. В силу непрерывности функции $V(y)$ найдется такое число η, что в J_η будет иметь место условие $|V| < V_0$. Так как функция $\dot{V}$ определенно-положительна, то $V(f(p,t))$ увеличивается с ростом t, и поэтому точка $f(p,t)$ не сможет оказаться в J_η. Предположим, что точка $f(p,t)$ не выйдет за пределы J_ε. В силу того, что $\dot{V}$ имеет в области $\overline{J_\varepsilon} \backslash J_\eta$ положительный минимум m, справедливо неравенство

$$V(f(p,t)) = V(p) + \int_0^t \dot{V}\, dt > V(p) + mt.$$

Отсюда следует, что с ростом t функция $V(f(p,t))$ растет неограниченно, но в то же время функция $V(y)$ как непрерывная должна быть ограниченной в шаровом слое $\overline{J_\varepsilon} \backslash J_\eta$. Полученное противоречие доказывает теорему. □

Замечание 1. *Факт устойчивости по Ляпунову является локальной характеристикой системы, т. к. обеспечивает свойство устойчивости лишь* *в некоторой окрестности тривиального решения. Нулевое решение системы* (1.2) *называется устойчивым в целом, если оно устойчиво по Ляпунову и если всякое другое решение* $y(t)$ *обладает следующим свойством:* $||y(t)|| \to 0$ *при* $t \to \infty$.

3. Метод функции Ляпунова для неустановившихся движений

Приведенные выше теоремы могут быть обобщены на случай неавтономных систем, также можно несколько ослабить предположения на правую часть системы (см. [2, 3, 6]).

В этом разделе будем рассматривать неустановившиеся движения, и уравнения возмущенного движения будут иметь вид

$$\dot{y}_i = F_i(t, y_1, \dots, y_n), \quad F_i(t, 0, \dots, 0) \equiv 0 \, (i = 1, \dots, n) \tag{1.9}$$

или в векторной форме:

$$\dot{y} = F(t, y), \; F(t, 0) \equiv 0. \tag{1.10}$$

Будем предполагать, что вектор-функция $F(t, y)$ в области

$$t \geq t_0 \geq 0, \; ||y|| \leq H, \tag{1.11}$$

где H — некоторая постоянная, которая непрерывна и удовлетворяет условиям существования, единственности и продолжимости решения на $[t_0, \infty)$.

В области

$$t \geq t_0, \; ||y|| \leq h \leq H, \tag{1.12}$$

где h — некоторая постоянная, будем рассматривать вещественные однозначные функции $V(t, y)$, причем $V(t, 0) \equiv 0$. Считаем, что в (1.12) функции Ляпунова непрерывны вместе со своими частными производными $\partial V / \partial t$ и $\partial V / \partial y_i \, (i = 1, ..., n)$.

Определение 7. *Функция* $V(t, y)$ *называется определенно-положительной (определенно-отрицательной), если существует такая не зависящая явно от* t *определенно-положительная функция* $W(y)$ (*в смысле определения* 3), *что в области* (1.12) *выполняется неравенство*

$$V(t, y) \geq W(y) \tag{1.13}$$

(*соответственно* $-V(t, y) \leq -W(y)$).

Определение 8. *Будем говорить, что функция $V(t, y)$ допускает бесконечно малый высший предел, если для любого $\epsilon > 0$ найдется $\delta(\epsilon) > 0$ такое, что при $t \geq t_0$, $||y|| \leq \delta$ выполняется неравенство $|V(t, y)| < \epsilon$. Другими словами, функция V допускает бесконечно малый высший предел, если она стремится к нулю при $|y| \to 0$ равномерно относительно переменной t.*

Проиллюстрируем введенные определения. Имеем функцию

$$V_1 = (\sum_{i=1}^{n} y_i^2) \exp(-t),$$

которая обращается в нуль только при $y_1 = \ldots = y_n = 0$. Но эта функция не является определенно-положительной, так как при фиксированных $y_1, \ldots, y_n$ она стремится к нулю при $t \to \infty$ и, следовательно, для нее не выполняется неравенство (1.13). Таким образом, необращение в нуль функции в области (1.12) не является достаточным условием ее знакоопределенности в рассматриваемом случае.

Рассмотрим функции

$$V_2 = (3 + 2\cos t) \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \geq \sum_{i=1}^{n} y_i^2,$$

$$V_3 = (-4 + 3\cos t) \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \leq -\sum_{i=1}^{n} y_i^2.$$

Первая из них будет, очевидно, определенно-положительной, вторая — определенно-отрицательной.

Пусть имеем функции

$$V_4 = (\sum_{i=1}^{n} y_i^2) \cos t, \; V_5 = \cos[t \sum_{i=1}^{n} y_i].$$

Функция V_4 стремится к нулю при $\sum\limits_{i=1}^{n} y_i^2 \to 0$ равномерно относительно t, т. е. допускает бесконечно малый высший предел, функция же V_5, будучи ограниченной, такого предела не допускает.

Теперь посмотрим, как изменятся основные теоремы об устойчивости и неустойчивости в случае, когда система стала неавтономной.

Теорема 4 (теорема Ляпунова об устойчивости). *Если для дифференциальных уравнений возмущенного движения можно найти знакоопределенную функцию $V(t, y)$, производная которой по времени в силу этих* *уравнений, т. е. выражение*

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial y_i} F_i(t, y_1, \ldots, y_n) \tag{1.14}$$

есть функция знакопостоянная знака, противоположного с $V(t, y)$, *или тождественно равна нулю, то невозмущенное движение устойчиво.*

Теорема 5 (теорема Ляпунова об асимптотической устойчивости). *Если для дифференциальных уравнений возмущенного движения можно найти знакоопределенную, допускающую бесконечно малый высший предел функцию* $V(t, y)$, *производная которой по времени в силу этих уравнений есть функция знакоопределенная знака, противоположного с* $V(t, y)$, *то невозмущенное движение асимптотически устойчиво.*

Теорема 6 (теорема Ляпунова о неустойчивости). *Пусть для дифференциальных уравнений возмущенного движения существует функция* $V(t, y)$, *допускающая бесконечно малый высший предел при* $y \longrightarrow 0$, *производная которой по времени в силу этих уравнений* $\dot{V}$ *есть функция знакоопределенная. Если при некотором* $t^* > t_0$ *в любой окрестности начала координат найдется такая точка* y^*, *что знак функции* V *одинаков со знаком* $\dot{V}$, *т. е.*

$$V(t^*, y^*) \cdot \dot{V}(t^*, y^*) > 0,$$

то тривиальное решение системы (1.10) *неустойчиво.*

Доказательства приведенных теорем можно найти, например в [6].

4. Теоремы Барбашина–Красовского

В предыдущих разделах были доказаны теоремы об асимптотической устойчивости и неустойчивости, причем в этих теоремах использовались функции Ляпунова, производные которых в силу уравнений возмущенного движения были знакоопределенными функциями. Однако особенно в прикладных задачах попытки построить функцию V со знакоопределенной производной часто приводят к серьезным трудностям. В то же время удается найти функцию Ляпунова со знакопостоянной производной, поэтому появились теоремы, указывающие условия, обеспечивающие асимптотическую устойчивость или неустойчивость при наличии лишь функции Ляпунова со знакопостоянной производной. Первыми из них были теоремы, доказанные Е. А. Барбашиным и Н. Н. Красовским.

Пусть система уравнений возмущенного движения имеет вид

$$\dot{y} = F(y),\ F(0) \equiv 0, \tag{1.15}$$

где правые части определены, непрерывны и удовлетворяют условиям существования и единственности решений в области

$$\|y\| \leq H \quad (H = const \text{ или } H = \infty) \tag{1.16}$$

и продолжимости на полуинтервал $[t_0, \infty)$.

Пусть $V(y)$ — некоторая определенно положительная функция Ляпунова, имеющая знакоотрицательную производную $\dot{V}$ в силу уравнений (1.15). Обозначим через $M = \{y : \dot{V}(y) = 0\}$ множество точек из области (1.16), где $\dot{V}(y) = 0$, исключая при этом точку $y = 0$, где всегда $\dot{V} = 0$.

Теорема 7. *Если для дифференциального уравнения* (1.15) *возмущенного движения можно найти определенно положительную функцию* $V(y)$, *производная которой в силу системы* (1.15) *удовлетворяет в области* (1.16) *следующим условиям:*

1) $\dot{V} < 0$ *вне* M;

2) $\dot{V} = 0$ *на* M, *где* M *— множество точек, не содержащее целых движений системы* (1.15) *(целых полутраекторий) при* $t_0 < t < \infty$, *то невозмущенное движение асимптотически устойчиво.*

Доказательство. В силу первой теоремы Ляпунова невозмущенное движение системы (1.15) при выполнении условий этой теоремы устойчиво, т. е. для любого $0 < \varepsilon < H$ можно указать такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что каждое возмущенное движение, выходящее при $t = t_0$ из области $\|y_0\| \leq \delta$, будет удовлетворять условию

$$\|y(t; t_0, y_0)\| < \varepsilon \tag{1.17}$$

при всех $t \geq t_0$. Требуется показать, что в данном случае будет асимптотическая устойчивость, т. е. $\lim\limits_{t \to \infty} \|y(t; t_0, y_0)\| = 0$.

В связи с тем, что производная по времени от функции V неположительна, то $V(y(t; t_0, y_0)) \leq V(y(t_0; t_0, y_0))$ при $t \geq t_0$ и функция V будет иметь определенный предел V_* при $t \to \infty$, причем

$$V(y(t; t_0, y_0)) \geq V_* \text{ при } t \geq t_0. \tag{1.18}$$

Пусть $V_* \neq 0$. В силу ограниченности решения $y(t; t_0, y_0)$ существует такая последовательность $t_k \to \infty$, что соответствующая последовательность точек $y(t_k; t_0, y_0)$ сходится к точке y_*, лежащей в области (1.17). В силу непрерывности функции V должно выполняться равенство $V(y_*) = V_*$.

Рассмотрим теперь траектории $y(t;t_0,y_0)$ и $y(t;t_0,y^{(k_i)})$, выходящие при $t=t_0$ соответственно из точек y_* и $y^{(k_i)}$, где $y^{(k_i)}$ — одна из точек последовательности, соответствующая $t=t_{k_i}$. В связи с тем, что по условию теоремы траектория $y(t;t_0,y_*)$ при $t_0 \le t < \infty$ не может лежать целиком на множестве M, то должны существовать такие интервалы времени, когда $\dot V < 0$ вдоль этой траектории. Следовательно, можно указать такой момент времени $T > t_0$, в который выполняется условие $V(y(T;t_0,y_*)) < V_*$. Так как последовательность $y(t_*;t_0,y_0)$ сходится к точке y_*, то в силу непрерывной зависимости решений от начальных данных можно записать

$$\|y(T;t_0,y_*) - y(T;t_0,y^{(k_i)})\| < \delta$$

при всех $k_i > N(\delta)$, каково бы ни было наперед заданное число $\delta > 0$. Следовательно,

$$\lim V(y(T;t_0,y^{(k_i)})) < V_* \,\text{при}\, k_i \to \infty. \tag{1.19}$$

Исходная система (1.15) автономна и поэтому ее решения обладают групповым свойством $y(t;t_0,y_0) \equiv y(t+\tau;t_0+\tau,y_0)$. Кроме того, в силу единственности решения, имеем $y(t;\tau,y(\tau;t_0,y_0)) = y(t;t_0,y_0)$. Отсюда получаем

$$y(T;t_0,y^{(k_i)}) = y(T+t_{k_i};t_0+t_{k_i},y(t_{k_i};t_0,y_0)) = y(T+t_{k_i};t_0,y_0). \tag{1.20}$$

Подставляя выражение (1.20) в (1.19), получаем

$$\lim V(y(T+t_{k_i};t_0,y_0)) < V_*$$

при $k_i \to \infty$. Это неравенство противоречит (1.18), поэтому допущение, что $V_* \ne 0$ неверно, следовательно, $V_* = 0$ и $\lim V(y(t;t_0,y_0)) = 0$ при $t \to \infty$.

Отсюда вследствие знакоопределенности $V(y)$ получаем

$$\lim_{t\to\infty} \|y(t;t_0,y_0)\| = 0,$$

что и требовалось доказать. □

Можно аналогичным образом сформулировать критерий неустойчивости, который является обобщением соответствующей теоремы Ляпунова [11, с. 84].

Теорема 8. *Если для дифференциальных уравнений возмущенного движения можно найти функцию $V(x)$, производная которой по времени в силу системы удовлетворяет в области* (1.16) *следующим условиям:*

1) $\dot V > 0$ *вне* M;

2) $\dot{V} = 0$ *на* M,
где M *— множество точек, не содержащее целых движений системы* (1.15) *(целых полутраекторий) при* $t_0 < t < \infty$, *и если при этом в любой окрестности начала координат можно указать точки, в которых* $V > 0$, *то невозмущенное движение неустойчиво.*

5. Геометрическая интерпретация метода функций Ляпунова

Для наглядности будем предполагать, что размерность вектора x равна двум. Пусть функция $V(y)$ является определенно положительной в некоторой окрестности начала координат, c — некоторая положительная постоянная, линия уровня $V(y) = c$ охватывает начало координат и вектор

$$\operatorname{grad} V(y) = \left(\frac{\partial V(y)}{\partial y_1}, \frac{\partial V(y)}{\partial y_2} \right)^{\mathrm{T}} \tag{1.21}$$

является внешней нормалью к линии уровня $V(y) = c$. Напомним, что вектор $\operatorname{grad} V(y)$ ортогонален к касательной, проведенной в точке приложения этого вектора, и показывает направление наискорейшего роста функции $V(y)$ в точке y. Производная функции Ляпунова в силу системы (1.7) есть ни что иное как скалярное произведение векторов $\operatorname{grad} V(y)$ и $F(y)$ (рис. 1).

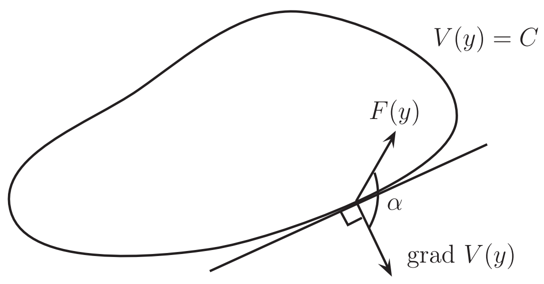

Рис. 1. Геометрическая иллюстрация метода функций Ляпунова

В случае, если скалярное произведение не положительно, векторы $\operatorname{grad} V(y)$ и $F(y)$ в каждой точке линии уровня $V(y) = C$ образуют угол α не меньше, чем $\frac{\pi}{2}$, а из этого следует, что траектория не выйдет из области $V(y) \leq c$.

6. Примеры

Пусть возмущенное движение описывается системой дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= -y_2 + \alpha y_1^3, \\ \dot{y}_2 &= -y_1 + \alpha y_2^3. \end{aligned} \tag{1.22}$$

Здесь α — параметр, не зависящий от времени. Рассмотрим следующую функцию Ляпунова:

$$V(y) = \tfrac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2)\ .$$

Производная этой функции в силу системы (1.22) будет следующей:

$$\dot{V} = \alpha(y_1^4 + y_2^4)\ .$$

Пусть $\alpha = 0$. Тогда в силу первой теоремы Ляпунова положение равновесия системы будет устойчиво. Если $\alpha < 0$, то положение равновесия в силу второй теоремы Ляпунова будет асимптотически устойчиво, и если $\alpha > 0$, то согласно третьей теореме Ляпунова положение равновесия будет неустойчиво.

Рассмотрим уравнение колебаний механического маятника

$$I\ddot{\varphi} + n\dot{\varphi} + Mgl\sin\varphi = 0, \tag{1.23}$$

где I — момент инерции, $n\dot{\varphi}$ — момент силы трения в оси подвеса, $Mgl\sin\varphi$ — момент силы тяжести, M — масса, g — ускорение свободного падения, l — длина маятника, φ — угол отклонения маятника от вертикали (рис. 2).

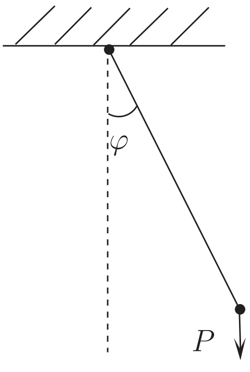

Рис. 2. Физический маятник

Уравнение (1.23) можно привести к виду

$$\ddot{\varphi} + a\dot{\varphi} + b^2\sin\varphi = 0,$$

где $a = \frac{n}{I}$, $b^2 = \frac{Mgl}{\mathrm{I}}$, или записать в виде системы

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= \omega, \\ \dot{\omega} &= -b^2\sin\varphi - a\omega. \end{aligned}$$

Известно, что маятник имеет два положения равновесия: одно при $\varphi = 0$ — устойчивое, а второе при $\varphi = \pi$ — неустойчивое.

Сначала проведем исследование на устойчивость нижнего положения равновесия. Для него $\varphi \equiv 0$ и $\omega \equiv 0$. Уравнения возмущенного движения будут иметь вид

$$\begin{aligned} \Delta\dot{\varphi} &= \Delta\omega, \\ \Delta\dot{\omega} &= -b^2 \sin\Delta\varphi - a\Delta\omega, \end{aligned} \tag{1.24}$$

т. к. в этом случае $\Delta\varphi = \varphi$ и $\Delta\omega = \omega$.

В качестве функции Ляпунова рассмотрим

$$V = \frac{\Delta\omega^2}{2} + b^2(1 - \cos\Delta\varphi). \tag{1.25}$$

С точностью до постоянной эта функция совпадает с полной энергией маятника. Заметим, что часто в качестве функции Ляпунова используется функция, описывающая полную энергию системы (1.6). Полная производная функции (1.25) в силу системы (1.24) имеет вид

$$\dot{V} = -a\Delta\omega^2. \tag{1.26}$$

Функция Ляпунова (1.25) является определенно-положительной, а производная в силу системы этой функции (1.26) — знакоотрицательной. Согласно первой теореме Ляпунова положение равновесия является устойчивым. Теперь убедимся, что при наличии трения в точке подвеса ($a > 0$) положение равновесия будет асимптотически устойчиво. Условия второй теоремы Ляпунова в данном случае не выполняются. Множество точек, на котором полная производная в силу системы (1.26) обращается в нуль, состоит из точек оси $\Delta\varphi$. Функция $\Delta\omega(t) \equiv 0$ может быть решением системы (1.24) только тогда, когда $\Delta\varphi(t) \equiv 0$. Следовательно, множество нулей полной производной функции Ляпунова не содержит полутраекторий системы (1.24), и тогда в силу теоремы 7 положение равновесия является асимптотически устойчивым.

Теперь исследуем на устойчивость второе положение равновесия $\varphi = \pi$, $\omega = 0$. Уравнения возмущенного движения в этом случае будут иметь вид

$$\begin{aligned} \Delta\dot{\varphi} &= \Delta\omega, \\ \Delta\dot{\omega} &= b^2 \sin\Delta\varphi - a\Delta\omega. \end{aligned} \tag{1.27}$$

Здесь $\Delta\varphi = \varphi - \pi$ и $\Delta\omega = \omega$. В качестве функции Ляпунова теперь выберем функцию

$$V = -\frac{\Delta\omega^2}{2} + b^2(1 - \cos\Delta\varphi). \tag{1.28}$$

Полная производная функции (1.28) в силу системы (1.27) будет следующей:

$$\dot{V} = a\Delta\omega^2. \tag{1.29}$$

Из (1.29) видно, что полная производная в силу системы не является определенно-положительной и поэтому вывод о неустойчивости верхнего положения равновесия из теоремы 3 мы сделать не можем. Но, как и в предыдущем случае, множество, на котором $\dot{V} = 0$, есть ось $\Delta\varphi$, не содержащая траекторий системы (1.27). Поэтому согласно теореме 8 можно утверждать, что положение равновесия в этом случае будет неустойчивым.

7. Устойчивость линейных неоднородных систем

Рассмотрим линейную систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y + f(t), \tag{1.30}$$

где $A(t)$ — $n \times n$ матрица-функция с непрерывными элементами, $f(t)$ есть n-мерная непрерывная вектор-функция, заданные на множестве $[t_0, \infty)$. Соответствующая однородная система будет иметь вид

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y. \tag{1.31}$$

Теорема 9. *Для устойчивости линейной системы* (1.30) *при любой непрерывной функции* $f(t)$ *необходимо и достаточно, чтобы было устойчивым тривиальное решение* $x_0 \equiv 0$ $(t_0 < t < \infty)$ *соответствующей однородной системы* (1.31).

Доказательство. Докажем сначала *необходимость* условия теоремы. Пусть $\xi(t)$ есть некоторое устойчивое решение неоднородной системы (1.30). Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любого решения $y = y(t)$ системы (1.30) при $(t_0 \leq t < \infty)$ выполняется неравенство

$$\|y(t) - \xi(t)\| < \varepsilon, \tag{1.32}$$

если

$$\|y(t_0) - \xi(t_0)\| < \delta. \tag{1.33}$$

Заметим, что функция

$$x(t) = y(t) - \xi(t) \tag{1.34}$$

является решением однородной системы (1.31). Таким образом, для $x(t)$ справедливо утверждение $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0$, что если $\|x(t_0)\| < \delta$, то $\|x(t)\| < \varepsilon$. Следовательно, тривиальное решение системы (1.31) устойчиво.

Докажем теперь достаточность условия теоремы. Пусть тривиальное решение системы (1.31) устойчиво, тогда для такого решения выполняется утверждение: $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0$, что если $\|x(t_0)\| < \delta$, то $\|x(t)\| < \varepsilon$ для всех $t > t_0$. В силу обозначения (1.34) из последнего утверждения будет следовать, что если $\xi(t)$ — некоторое решение неоднородной системы (1.30), то неравенство

$$\|y(t_0) - \xi(t_0)\| < \delta$$

обеспечит выполнение неравенства

$$\|y(t) - \xi(t)\| < \varepsilon$$

при $t_0 \le t$. Следовательно, решение $\xi(t)$ устойчиво при $t \longrightarrow \infty$. □

Следствие 1. *Линейная система устойчива, когда устойчиво хотя бы одно решение этой системы, и неустойчива, если неустойчиво некоторое ее решение.*

Следствие 2. *Линейная неоднородная система устойчива тогда и только тогда, когда устойчива соответствующая однородная система.*

Теорема 10. *Для асимптотической устойчивости линейной системы* (1.30) *при любой непрерывной функции $f(t)$ необходимо и достаточно, чтобы асимптотически устойчивым было тривиальное решение $x_0 \equiv 0$ $(t_0 < t < \infty)$ соответствующей однородной системы* (1.31).

Справедливость утверждения теоремы вытекает из того, что разность двух решений линейной неоднородной системы является решением однородной системы.

8. Устойчивость линейных однородных систем

Рассмотрим систему (1.31).

Теорема 11. *Линейная однородная система* (1.31) *устойчива по Ляпунову тогда и только тогда, когда каждое решение $x(t)$ $t \in [t_0, \infty)$ этой системы ограничено на полуоси $t \in [t_0, \infty)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем сначала, что из ограниченности решений линейной системы следует ее устойчивость. Пусть любое решение линейной системы (1.31) ограничено на полуоси. Рассмотрим нормированную фундаментальную матрицу

$$X(t) = \{x_{ij}(t)\},$$

где $X(t_0) = E$. Так как $X(t)$ состоит из ограниченных функций x_{ij}, то она ограничена

$$\|X(t)\| \leq M, \quad t \in [t_0, \infty),$$

где M — некоторая положительная постоянная.

Всякое решение системы (1.31) можно представить в виде

$$x(t) = X(t)\, x(t_0).$$

Отсюда следует следующая цепочка неравенств:

$$\|x(t)\| \leq \|X(t)\| \cdot \|x(t_0)\| \leq M\|x(t_0)\| \leq \varepsilon,$$

если

$$\|x(t_0)\| < \frac{\varepsilon}{M} = \delta.$$

Последние два неравенства показывают, что при таком выборе ε, δ для решения $x(t)$ выполняется утверждение, являющееся определением устойчивости для тривиального решения $x(t) \equiv 0$.

Теперь докажем *необходимость* утверждения теоремы, т. е. что из устойчивости нулевого решения следует ограниченность произвольного решения. Предположим противное: пусть $z(t)$ является неограниченным решением (понятно, что для этого решения $z(t_0) \neq 0$). Заметим, что под неограниченным решением на полуоси $[t_0, \infty)$ будем понимать следующее: для любого положительного числа Q и любого момента $t_1 > t_0$ найдется момент $t_2 > t_1$, когда будет выполняться неравенство $|z(t_2)| > Q$. В силу устойчивости нулевого решения для любого положительного ε существует $\delta > 0$, что из условия $\|x(t_0)\| < \delta$ следует неравенство $\|x(t)\| < \varepsilon$ при $t > t_0$. Пусть $\tilde{x}(t) = \frac{z(t)}{\|z(t_0)\|} \cdot \frac{\delta}{2}$. Очевидно, что $\|\tilde{x}(t_0)\| = \frac{\delta}{2}$. Пусть $Q = \frac{2\varepsilon\|z(t_0)\|}{\delta}$. В силу неограниченности $z(t)$ для любого $t_1 > t_0$ найдется такое $t_2 > t_1$, что будет выполняться неравенство $\|z(t_2)\| > Q$. Но тогда

$$\|\tilde{x}(t_2)\| = \frac{\|z(t_2)\|}{\|z(t_0)\|}\frac{\delta}{2} > \varepsilon,$$

а это противоречит устойчивости нулевого решения однородной системы. □

Следствие. *Если неоднородная линейная система устойчива, то все ее решения или ограничены, или неограничены при $t \longrightarrow \infty$.*

Пример 1. Рассмотрим скалярное уравнение

$$\frac{dy}{dt} = 1 + t - y.$$

Это уравнение допускает неограниченное решение $y_0(t) = t$. Общее решение имеет вид

$$y(t) = t + Ce^{-t}.$$

Из общего решения видно, что решение $y_0(t) = t$ асимптотически устойчиво.

Теорема 12. *Линейная однородная система* (1.31) *асимптотически устойчива тогда и только тогда, когда каждое решение $x(t)$ $t \in [t_0, \infty)$ этой системы стремится к нулю при $t \longrightarrow \infty$.*

Доказательство. Пусть система (1.31) является асимптотически устойчивой. Тогда для любого ее решения, начальное условие которого удовлетворяет условию $\|\xi(t_0)\| < \Delta$, где Δ — некоторая положительная величина, справедливо

$$\xi(t) \longrightarrow 0 \tag{1.35}$$

при $t \longrightarrow \infty$. Рассмотрим произвольное решение $x(t)$, порожденное начальным условием $x(t_0) = x_0 \neq 0$. Пусть

$$x(t) = \xi(t)\frac{\|x(t_0)\|}{1/2\Delta}, \tag{1.36}$$

где

$$\xi(t) = \frac{x(t)}{\|x(t_0)\|}\frac{\Delta}{2}.$$

Решение $\xi(t)$ удовлетворяет условию

$$\|\xi(t_0)\| = \frac{\Delta}{2} < \Delta,$$

поэтому $\xi(t) \longrightarrow 0$ при $t \longrightarrow \infty$. Из выражения (1.36) в силу (1.35) следует, что

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0.$$

Таким образом, *необходимость* доказана.

Пусть $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$. Тогда для каждого решения $x(t)$ $(t_0 \leq t < \infty)$ существует $T > t_0$, что

$$\|x(t)\| < 1$$

для $T < t < \infty$. Так как на конечном отрезке $[t_0, T]$ непрерывная векторфункция $x(t)$ ограничена, то любое решение $x(t)$ ограничено на полуоси $[t_0, \infty)$ и, следовательно, на основании теоремы система устойчива, причем нулевое решение асимптотически устойчиво. Поэтому в силу теоремы 10 следует асимптотическая устойчивость системы (1.30). □

9. Устойчивость линейной системы с постоянной матрицей

Теперь рассмотрим систему

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \tag{1.37}$$

где $A = \{a_{ij}\}$ — постоянная $n \times n$ матрица.

Теорема 13. *Линейная однородная система* (1.37) *устойчива тогда и только тогда, когда все характеристические корни* $\lambda_j = \lambda_j(A)$ *матрицы* A *обладают неположительными вещественными частями* $Re\lambda_j(A) \le 0$ $(j = 1, 2, ..., n)$, *причем характеристические числа, имеющие нулевые вещественные части, не являются кратными.*

Доказательство. Пусть $\lambda_j = \alpha_j + \beta_j$ $(j \in \overline{1,p},\ p \le n)$ — все характеристические корни матрицы A с отрицательными вещественными частями α_j и $\lambda_k = i\gamma_k$ $(k \in \overline{1,q})$ — все характеристические числа с нулевой действительной частью. При сделанных предположениях общее решение системы будет иметь вид

$$x(t) = \sum_{j=1}^{p} e^{\alpha_j t}(\cos\beta_j t + \sin\beta_j t)P_j(t) + \sum_{k=1}^{q}(\cos\gamma_k t + \sin\gamma_k t)c_k, \tag{1.38}$$

где $P_j(t)$ — некоторые полиномиальные вектор-функции степени не выше кратности корня λ_j, c_k — постоянные векторы. Так как $\alpha_j < 0$, то

$$e^{\alpha_j t}P_j(t) \longrightarrow 0 \text{ при } t \longrightarrow \infty.$$

Кроме того,

$$|\cos\gamma_k t + \sin\gamma_k t| \le \sqrt{2}.$$

Поэтому из (1.38) следует, что всякое решение системы (1.37) ограничено на полуоси $t \in [t_0, \infty)$. Тогда в силу теоремы 11 система (1.37) устойчива.

Докажем теперь необходимость условий теоремы. Пусть система (1.37) устойчива. Убедимся, что все характеристические корни матрицы A имеют неположительные вещественные части. Доказательство проведем методом от противного. Пусть у собственного числа $\lambda_s = \alpha_s + i\beta_s$ матрицы A

$$Re\lambda_s = \alpha_s > 0.$$

В этом случае у системы (1.37) будет решение

$$\xi(t) = e^{\lambda_s t}c = e^{\alpha_s t}(\cos\beta_s t + \sin\beta_s t),$$

где $\|c\| \neq 0$. Отсюда следует

$$\|\xi(t)\| = e^{\alpha_s t}\|c\| \longrightarrow \infty \text{ при } t \longrightarrow \infty.$$

Это означает, что решение $\xi(t)$ является неограниченным, а это в свою очередь противоречит устойчивости системы (1.37). □

Для свойства асимптотической устойчивости справедлива следующая теорема.

Теорема 14. *Система* (1.37) *асимптотически устойчива тогда и только тогда, когда все характеристические корни $\lambda_j = \lambda_j(A)$ матрицы A имеют отрицательные вещественные части $Re\lambda_j(A) < 0 \quad (j = 1, 2, ..., n)$.*

Доказательство теоремы нетрудно получить путем незначительной модификации доказательства предыдущей теоремы.

10. Критерии Гурвица и Михайлова

Из предыдущего параграфа следует, что если все собственные числа матрицы системы имеют отрицательные действительные части, то система (1.37) устойчива. Но, чтобы воспользоваться этим результатом, необходимо знать корни характеристического уравнения (степень которого равна порядку матрицы системы), а найти эти корни при высоком порядке матрицы — задача достаточно трудоемкая. На самом же деле нам знать корни характеристического уравнения совсем необязательно. Достаточно быть уверенным, что среди них нет корней с положительной и нулевой действительной частью. Ответ на этот вопрос дает критерий Гурвица, который не предполагает решения характеристического уравнения.

Рассмотрим полином вида

$$f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + ... + a_{n-1} z + a_n, \tag{1.39}$$

где $a_0 > 0,\ n \geq 1$. Составим $(n \times n)$-матрицу Гурвица:

$$M_f = \begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & ... & 0 \\ . & . & . & . & ... & . \\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & a_{2n-3} & a_{2n-4} & ... & a_n \end{pmatrix}, \tag{1.40}$$

где $a_s = 0$ при $s < 0$ и $s > n$.

Теорема 15 (критерий Гурвица). *Для того чтобы полином* (1.39) *являлся полиномом Гурвица, необходимо и достаточно, чтобы были положительны все главные диагональные миноры матрицы Гурвица* (1.40), *т. е.*

$$\Delta_1 = a_1 > 0,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} > 0, ..., \Delta_n = a_n \Delta_{n-1} > 0 \tag{1.41}$$

(условие Гурвица).

Другим критерием, обеспечивающим отрицательность действительных частей корней характеристического уравнения, является критерий Михайлова.

Теорема 16 (критерий Михайлова). *Для того чтобы уравнение*

$$f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + ... + a_{n-1} z + a_n = 0 \tag{1.42}$$

имело корни с отрицательной действительной частью, необходимо и достаточно, чтобы на комплексной плоскости точка $f(i\omega)$ при изменении ω от 0 до ∞ не проходила через начало координат и сделала поворот вокруг него на угол $n\pi/2$ против хода часовой стрелки.

Для критерия Михайлова существует другая эквивалентная формулировка: *для того чтобы корни уравнения* (1.42) *имели отрицательные действительные части, необходимо и достаточно, чтобы $a_n a_{n-1} > 0$ и корни многочленов*

$$p(\xi) = a_n - a_{n-2}\xi + a_{n-4}\xi^2 - ...,$$
$$q(\eta) = a_{n-1} - a_{n-3}\eta + a_{n-5}\eta^2 - ...$$

были все положительными, различными и чередующимися, начиная с корня ξ_1.

Это является следствием того факта, что при $\lambda = i\omega$ $f(i\omega) = p(\omega^2) + i\omega q(\omega^2)$.

Доказательство этих теорем можно найти, например в [16].

Пример 1. Рассмотрим уравнение

$$\lambda^4 + 2\lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0. \tag{1.43}$$

Матрица Гурвица будет иметь вид

$$M_f = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \tag{1.44}$$

Вычисляя последовательные угловые миноры, получим: $\Delta_1 = 1,\ \Delta_2 = 3,$ $\Delta_3 = 1,\ \Delta_4 = 2$. В результате имеем, что все угловые миноры положительны и, согласно критерию Гурвица, у всех корней уравнения (1.43) будут отрицательные действительные части.

Теперь применим к уравнению (1.43) критерий Михайлова. Сначала составим многочлены $p(\xi)$ и $q(\eta)$. Имеем

$$p(\xi) = \xi^2 - 3\xi + 2,$$

$$q(\eta) = 3 - 2\eta.$$

Корни этих многочленов будут следующими: $\xi_1 = 1,\ \xi_2 = 2,\ \eta_1 = 1,5$. Для этих корней справедливо неравенство $0 < \xi_1 < \eta_1 < \xi_2$. Таким образом, мы вновь (теперь с помощью критерия Михайлова) убедились, что все корни уравнения $f(z) = 0$ будут иметь отрицательные действительные части.

11. Лемма Гронуолла–Беллмана

Для получения различных оценок на решения дифференциальных уравнений в качественной теории дифференциальных уравнений и теории устойчивости часто используется так называемая оценка из леммы Гронуолла, которую впервые для получения оценок дифференциальных уравнений применил Р. Беллман и которую с тех пор обычно называют леммой Гронуолла–Беллмана.

Лемма 2 (лемма Гронуолла–Беллмана). *Пусть $u \geq 0$ и $f(t) \geq 0$ при $t \geq t_0$, $u(t)$ и $f(t)$ — непрерывные на $[t_0, \infty)$ функции, причем при $t \geq t_0$ выполняется неравенство*

$$u(t) \leq c + \int_{t_0}^{t} f(s)u(s)\,ds, \tag{1.45}$$

где c — положительная постоянная. Тогда при $t \geq t_0$ справедлива оценка

$$u(t) \leq c \exp \int_{t_0}^{t} f(s)\,ds. \tag{1.46}$$

Доказательство. Из неравенства (1.45) следует

$$\frac{u(t)}{c + \int_{t_0}^{t} f(s)u(s)\,ds} \leq 1.$$

Умножив последнее неравенство на $f(t)$, имеем

$$\frac{f(t)u(t)}{c+\int_{t_0}^{t} f(s)u(s)\,ds} \le f(t). \tag{1.47}$$

Так как

$$\frac{d}{dt}[c+\int_{t_0}^{t} f(s)u(s)\,ds] = f(t)u(t),$$

то, интегрируя неравенство (1.47) на промежутке $[t_0, t]$, получим

$$\ln[c+\int_{t_0}^{t} f(s)u(s)\,ds] - \ln c \le \int_{t_0}^{t} f(s)\,ds.$$

Из последнего неравенства следует

$$c+\int_{t_0}^{t} f(s)u(s)\,ds \le c\exp\int_{t_0}^{t} f(s)\,ds.$$

Принимая во внимание неравенство (1.45), получаем (1.46). □

12. Устойчивость по первому приближению

Теперь обсудим вопрос об устойчивости решений нелинейной системы. Этот вопрос эквивалентен вопросу об устойчивости нулевого решения системы

$$\dot{y} = F(t,y), \tag{1.48}$$

где $F(t,0)=0$ при $t \ge t_0$. Будем полагать,что уравнение (1.48) представимо в виде

$$\dot{y} = A(t)y + F^*(t,y). \tag{1.49}$$

Теорема 17. *Пусть $Y(t,\tau)$ — фундаментальная матрица системы уравнений $\dot{y} = A(t)y$ удовлетворяет неравенству*

$$|Y(t,\tau)| \le Re^{-\rho(t-\tau)} \quad R>0,\ \ \rho>0, \tag{1.50}$$

а также справедливо неравенство

$$F^*(t,y) \le \alpha|y|;\ t \ge t_0.$$

Тогда любое решение системы (1.49) *удовлетворяет неравенству*

$$|y(t)| \le e^{-(\rho-\alpha R)(t-t_0)} \cdot R|y(t_0)|, \tag{1.51}$$

и при выполнении условия $\alpha < \frac{\rho}{R}$ нулевое решение системы (1.49) *является асимптотически устойчивым.*

Доказательство. Пусть $x(t)$ — решение системы (1.49). Тогда в силу формулы Коши справедливо равенство

$$y(t) = Y(t, t_0)y(t_0) + \int_{t_0}^{t} Y(t, \tau)F^*(\tau, y(\tau))\, d\tau. \tag{1.52}$$

С учетом предположений теоремы вычислим модули левой и правой частей в (1.52). В силу известных свойств суммы модулей и модуля интеграла получим неравенство

$$|y(t)| \le Re^{-\rho(t-t_0)}|y(t_0)| + R\alpha \int_{t_0}^{t} e^{-\rho(t-\tau)}|y(\tau)|\, d\tau. \tag{1.53}$$

Умножая (1.53) на $e^{-\rho(t-t_0)}$ и вводя замену

$$z(t) = e^{\rho(t-t_0)}|y(t)|, \tag{1.54}$$

имеем

$$z(t) \le Rz(t_0) + R\alpha \int_{t_0}^{t} z(\tau)\, d\tau. \tag{1.55}$$

Применим к неравенству (1.55) неравенство Гронуолла–Беллмана. Получим следующую оценку решения неравенства (1.55):

$$z(t) \le Rz(t_0)e^{R\alpha(t-t_0)}. \tag{1.56}$$

Умножая (1.56) на $e^{-\rho(t-t_0)}$, с учетом замены (1.54), убеждаемся в справедливости оценки (1.51). □

Неравенство (1.51) показывает, что если линейная система асимптотически устойчива (для фундаментальной матрицы системы справедлива оценка (1.50)), то при малых отклонениях от начала координат величина α будет малой и свойство асимптотической устойчивости сохранится и для нелинейной системы.

13. Точки покоя линейных систем второго порядка с постоянными коэффициентами

Изучение точек покоя, точнее фазовых траекторий в окрестности этих точек, представляет собой достаточно сложную задачу. Мы ограничимся лишь случаем линейной однородной системы второго порядка с постоянными коэффициентами.

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x} = a_{11}x + a_{12}y, \\ \dot{y} = a_{21}x + a_{22}y. \end{cases} \tag{1.57}$$

Исследование на устойчивость будем осуществлять, используя непосредственное интегрирование системы.

Будем предполагать, что определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11}a_{12} \\ a_{21}a_{22} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Очевидно, что $x(t) = y(t) \equiv 0$ является решением системы (1.57), т. е. начало координат является точной покоя системы (1.57).

Разделим второе уравнение в системе (1.57) на первое. Получим:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{21}x + a_{22}y}{a_{11}x + a_{12}y}. \tag{1.58}$$

С помощью замены

$$\xi_1 = \alpha x + \beta y, \;\; \xi_2 = \gamma x + \delta y \tag{1.59}$$

получим уравнение, аналогичное (1.58), но уже в новых координатах

$$\frac{d\xi_2}{d\xi_1} = \frac{\gamma(a_{11}x + a_{12}y) + \delta(a_{21}x + a_{22}y)}{\alpha(a_{11}x + a_{12}y) + \beta(a_{21}x + a_{22}y)}. \tag{1.60}$$

Теперь подберем коэффициенты в замене (1.59) так, чтобы в (1.60) числитель имел вид $\lambda\eta$, т. е. чтобы было справедливо равенство

$$\gamma(a_{11}x + a_{12}y) + \delta(a_{21}x + a_{22}y) = \lambda\xi_2 = \lambda(\gamma x + \delta y).$$

Сравнивая коэффициенты при x и y слева и справа в последнем двойном равенстве, получим для определения γ и δ следующую систему:

$$\begin{cases} \gamma(a_{12} - \lambda) + \delta a_{22} = 0, \\ \gamma a_{11} + \delta(a_{12} - \lambda) = 0. \end{cases} \tag{1.61}$$

Эта однородная система будет иметь ненулевое решение, если определитель ее будет равен нулю, т.е.

$$\begin{vmatrix} a_{21} - \lambda & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Вычислив этот определитель, получим уравнение

$$\lambda^2 - (a_{12} + a_{21})\lambda + a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21} = 0. \qquad (1.62)$$

Аналогично, приравнивая знаменатель в правой части уравнения (1.60) величине $\mu\xi_1$ и действуя как в предыдущем случае, мы получим для нахождения α и β систему

$$\begin{cases} \alpha(a_{12} - \mu) + \beta a_{22} = 0, \\ \alpha a_{11} + \beta(a_{12} - \mu) = 0. \end{cases} \qquad (1.63)$$

Для того чтобы найти из этой системы ненулевые решения α и β, нужно потребовать, чтобы определитель системы (1.63) был равен нулю, а такое условие приведет к уравнению

$$\mu^2 - (a_{12} + a_{21})\mu + a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21} = 0. \qquad (1.64)$$

Сравнивая (1.62) и (1.64), убеждаемся в том, что λ и μ должны быть корнями одного и того же уравнения.

Корни характеристического уравнения действительные и различные. Узел. Седло

Предположим, что характеристическое уравнение (1.62) имеет различные действительные корни λ_1 и λ_2. Обозначим собственные векторы, соответствующие корням λ_1, λ_2, через h_1, h_2. Общее решение системы (1.57) имеет вид

$$X = c_1 h_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 h_2 e^{\lambda_2 t}, \qquad (1.65)$$

где $X = (x, y)^T$. Выше мы осуществили замену (1.59), в результате применения которой уравнение (1.60) принимает вид

$$\frac{d\xi_2}{d\xi_1} = \frac{\lambda_2 \xi_2}{\lambda_1 \xi_1}. \qquad (1.66)$$

Заметим, что преобразование (1.59) осуществляет переход от осей x, y к новым (вообще говоря, косоугольным) осям ξ_1, ξ_2 и преобразование масштаба вдоль каждой оси. При этом в системе координат $x0y$ новые оси будут направлены по собственным векторам h_1 и h_2.

Уравнение (1.66) можно проинтегрировать. В результате получим:

$$\frac{d\xi_2}{\xi_2} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\frac{d\xi_1}{\xi_1},$$

$$\ln|\xi_2| = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\ln|\xi)| + \ln|C|,$$

$$\xi_2 = C|\xi_1|^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}. \tag{1.67}$$

Заметим, что в новых координатах решение (1.65) будет иметь следующий вид: $\xi_1 = C_1e^{\lambda_1 t}$, $\xi_2 = C_2e^{\lambda_2 t}$.

Узел. Предположим, что корни λ_1 и λ_2 имеют одинаковые знаки. Для определенности положим $|\lambda_1| < |\lambda_2|$.

а) Пусть $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$. При $t \to +\infty$ $\xi_1 \to 0$ и $\xi_2 \to 0$, но ξ_2 стремится к нулю быстрее, так как $|\lambda_2| > |\lambda_1|$. Если условно присоединить точку $(0, 0)$ к траектории, то можно сказать, что в этой точке траектория касается оси $O\xi_1$. Из выражения (1.67) видно, что фазовые траектории в рассматриваемом случае будут параболообразными кривыми. Придавая постоянным c_1 и c_2 различные значения, получим семейство траекторий в первом квадранте, а затем и на всей фазовой плоскости. На рис. 3,а стрелками указано направление движения точек.

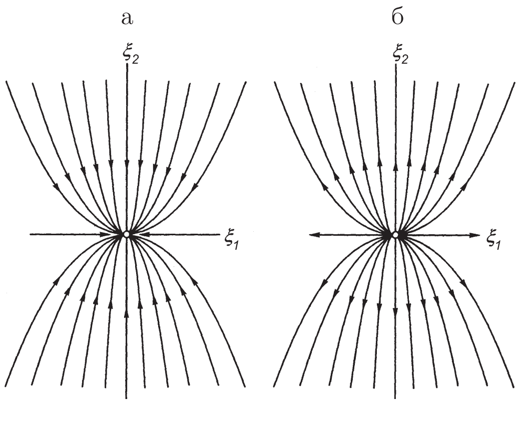

Рис. 3. Устойчивый и неустойчивый узлы

б) Пусть теперь $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$. Траектории остаются теми же, но меняются на противоположные направления движения точек. Соответствующий фазовый портрет изображен на рис. 3,б.

В случае а) фазовый портрет называется устойчивым узлом, в случае б) — неустойчивым узлом.

Седло. Пусть корни λ_1 и λ_2 имеют противоположные знаки, например $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$. Тогда фазовые траектории согласно выражению (1.67) будут иметь вид

$$\xi_2 = C|\xi_1|^{-k},$$

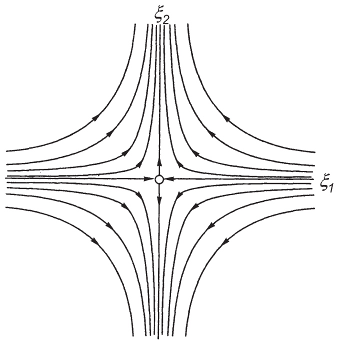

Рис. 4. Седло

где $k = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$. Соответствующие фазовые траектории показаны на рис. 4. Данный фазовый портрет называется седлом. Заметим, что в данном случае положение равновесия является неустойчивым и ни одно решение, кроме тождественного, не проходит через начало координат.

Корни характеристического уравнения комплексные. Фокус. Центр

Фокус. Пусть $\lambda_1 = \lambda = p + ig$, тогда сопряженный корень имеет вид $\lambda_2 = \overline{\lambda} = p - ig$. Известно, что в этом случае решение системы можно представить в виде

$$\begin{cases} x = e^{pt}(c_1 \cos qt + c_2 \sin qt), \\ y = e^{pt}(c_1^* \cos qt + c_2^* \sin qt). \end{cases} \tag{1.68}$$

Здесь c_1 и c_2 — произвольные постоянные, а c_1^* и c_2^* — их некоторые линейные комбинации. Сначала будем считать $p < 0$. В выражении (1.68) множитель e^{pt} в силу предположения $p < 0$ с ростом t стремится к нулю. Второй сомножитель является периодической функцией и на плоскости организует вращательное движение вокруг начала координат. Если бы первого сомножителя не было, то траектории были бы замкнутыми кривыми, вращающимися вокруг начала координат. Первый же сомножитель постоянно уменьшает радиус вектор, описывающий траекторию, и превращает вращательные движения вокруг начала координат в спирали, асимптотически стремящиеся к началу координат. В этом случае точка покоя асимптотически устойчива и называется устойчивым фокусом. Заметим, что вращение может быть как по часовой стрелке, так и против часовой стрелки.

Если $p > 0$, то с ростом t первый сомножитель в выражении (1.68) неограниченно растет, и это приводит к тому, что на фазовой плоскости траектория превращается в раскручивающуюся спираль. При стремлении t к бесконечности траектория также стремится к бесконечности. В этом случае начало координат является неустойчивым и такая точка покоя называется неустойчивым фокусом. Устойчивый и неустойчивый фокусы показаны на рис. 5,а,б.

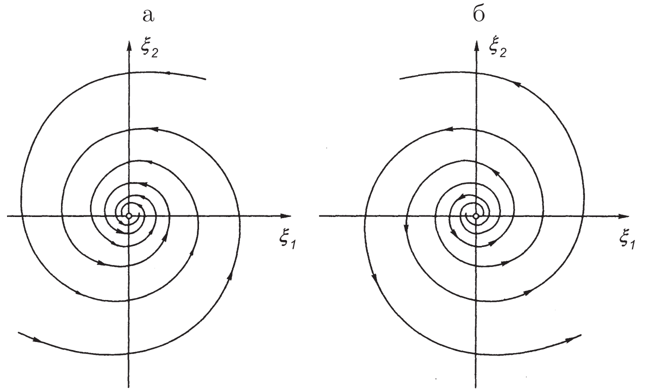

Рис. 5. Устойчивый и неустойчивый фокусы

Центр. При $p = 0$ фазовыми траекториями в плоскости являются замкнутые кривые (т. е. циклы). Фазовый портрет называется центром. Все движения являются периодическими с периодом $T = \frac{2\pi}{\nu}$. На рис. 6,а,б изображены фазовые портреты центра в плоскости E^* и E.

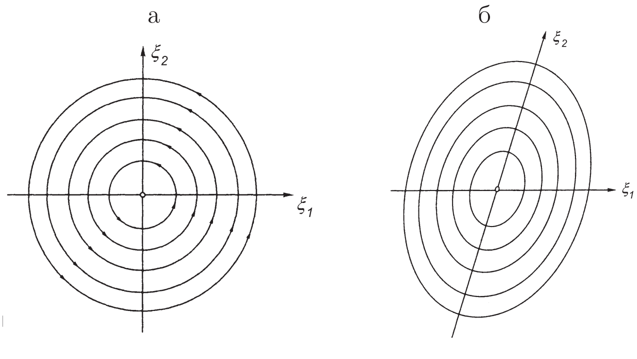

Рис. 6. Центр

Вырожденные случаи

Вырожденными случаями системы (1.57) называют такие случаи, когда как угодно малые изменения коэффициентов матрицы A приводят к качественно другим фазовым портретам. Примером может служить центр. Далее будут рассматриваться вырожденные случаи.

Корни характеристического уравнения действительные и равные

Пусть матрица A имеет единственное собственное значение кратности два, т. е. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \neq 0$. Возможны два случая.

а) В плоскости существует базис h_1, h_2, состоящий из собственных векторов числа λ. Общее решение имеет в этом случае вид

$$X = c_1 h_1 e^{\lambda t} + c_2 h_2 e^{\lambda t} = (c_1 h_1 + c_2 h_2) e^{\lambda t} = X_0 e^{\lambda t}.$$

Давая различные значения постоянным c_1 и c_2, можно получить любой вектор X_0. Траектория лежит на луче, проведенном из начала координат в бесконечность и содержащем вектор X_0. При $\lambda < 0$ и $t \to +\infty$ точки по лучам движутся к точке покоя $(0,0)$. Если $\lambda > 0$, то при $t \to +\infty$ точки движутся по лучам в бесконечность. Фазовый портрет системы в этом случае называют дикритическим узлом, устойчивым при $\lambda < 0$ (рис. 7,а) и неустойчивым при $\lambda > 0$ (см. рис. 7,б).

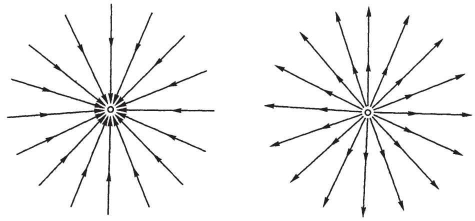

Рис. 7. Дикритический узел

б) В плоскости существует базис h_1, h_2, представляющий собой серию для собственного значения λ: $Ah_1 = \lambda h_1, Ah_2 = \lambda h_2 + h_1$. В этом случае общее решение выражается формулой $X = c_1 h_1 e^{\lambda t} + c_2 (t h_1 + h_2) e^{\lambda t}$. Обозначим $\xi_1 = (c_1 + c_2 t) e^{\lambda t}, \xi_2 = c_2 e^{\lambda t}$. Тогда $X = \xi_1 h_1 + \xi_2 h_2$.

Построим фазовый портрет системы. Достаточно установить вид фазовых траекторий в верхней полуплоскости, так как имеет место симметрия относительно начала координат (смена знака c_1 и c_2 приведет к смене знака у ξ_1 и ξ_2 с сохранением их абсолютной величины). При $c_2 = 0$ на оси $O\xi_1$ лежат три траектории вида $\xi_1 = c_1 e^{\lambda t}$ $(c_1 > 0, c_1 = 0, c_1 < 0)$. Пусть теперь $c_1 = 0$, а $c_2 > 0$: $\xi_1 = c_2 t e^{\lambda t}, \xi_2 = c_2 e^{\lambda t}$.

Если $\lambda < 0$, то при t, изменяющемся от нуля до $+\infty$, абсцисса ξ_1 движущейся точки сначала от нуля возрастает, а после числа $t = -\frac{1}{\lambda}$ начнет убывать и стремиться к нулю; ξ_2 монотонно стремится к нулю быстрее, чем ξ_1, поэтому траектория касается оси $O\xi_1$. При $t \to -\infty$ точка уходит в бесконечность, причем $\xi_1 \to -\infty$, а $\xi_2 \to +\infty$ и $|\xi_1|$ возрастает быстрее, чем

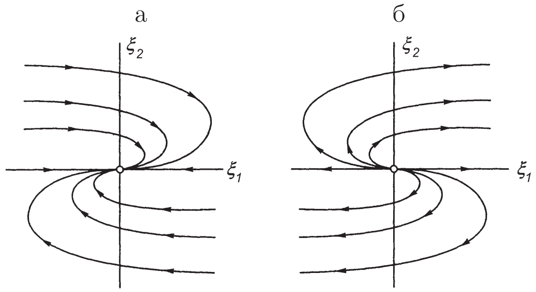

Рис. 8. Монокритический узел

$|\xi_2|$. Из вида системы ясно, что фазовый портрет будет симметричным относительно начала координат. Фазовые траектории в этом случае изображены на рис. 8,а.

На рис. 8,б изображен фазовый портрет в случае $\lambda > 0$. Фазовый портрет на рис. 8,а называют устойчивым вырожденным узлом, а на рис. 8,б — неустойчивым вырожденным узлом.

Квадратное уравнение имеет одинаковые корни, когда его дискриминант равен нулю. Это условие можно нарушить как угодно малым изменением коэффициентов матрицы A. Поэтому узлы называются вырожденными.

Осталось рассмотреть случай $\det A = 0$. Совершенно очевидно, что этот случай вырожденный.

Один или оба корня характеристического уравнения равны нулю

а) $\lambda_1 = 0, \lambda_2 \neq 0$. Общее решение имеет вид $X = c_1 h_1 + c_2 h_2 e^{\lambda t}$. Точки движутся по прямым, параллельным оси $O\xi_2$. При $\lambda_2 < 0$ они неограниченно приближаются к оси $O\xi_1$. При $\lambda_2 > 0$ точки удаляются в бесконечность. Все точки оси $O\xi_1$ являются точками покоя.

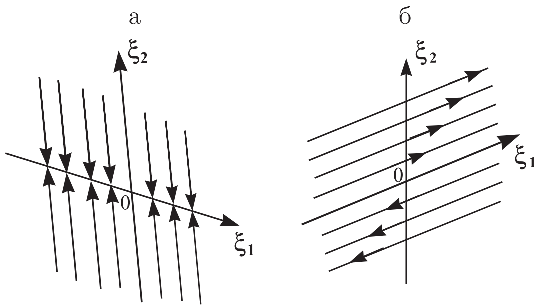

Рис. 9. Случай нулевого корня

б) $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Здесь две возможности, как и при $\lambda_1 = \lambda_2 \neq 0$.

1. Имеется базис, состоящий из собственных векторов h_1 и h_2 матрицы A, т. е. $Ah_1 = 0, Ah_2 = 0$. С учетом линейной независимости векторов h_1 и h_2 следует, что $A = 0$. Система (1.57) имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 0, \\ \dot{x}_2 = 0. \end{cases}$$

Ее решение $x_1 = c_1$ и $x_2 = c_2$. Вся плоскость состоит из точек покоя.

2. Имеется базис, образующий серию: $Ah_1 = 0$, $Ah_2 = h_1$. Из формулы $X = c_1 h_1 e^{\lambda t} + c_2(th_1 + h_2)e^{\lambda t}$ для кратного корня λ получаем при $\lambda = 0$

$$X = c_1 h_1 + c_2(th_1 + h_2) = (c_1 + c_2 t)h_1 + c_2 h_2.$$

Точки движутся равномерно по прямым $\xi_2 = c_2$ и чем ближе к оси $O\xi_1$, тем медленнее. Ось $O\xi_1$ состоит из точек покоя. На рис. 9 изображены фазовые портреты, получившиеся после обратного преобразования плоскости E^* в E.

14. Примеры построения фазовых портретов для линейных и нелинейных систем второго порядка

Пример 1. Требуется исследовать поведение фазовых кривых системы уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -3x + 2y, \\ \frac{dy}{dt} = x - 4y. \end{cases} \tag{1.69}$$

Сделать чертеж.

Характеристическое уравнение имеет вид

$$\begin{vmatrix} -3 - \lambda & 2 \\ 1 & -4 - \lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{1.70}$$

Вычислив определитель, получим $\lambda^2 + 7\lambda + 10 = 0$. Корни этого уравнения будут следующими: $\lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = -5$. Так как корни характеристического уравнения действительные и отрицательные, то положением равновесия будет устойчивый узел. Прямые, содержащие фазовые кривые, ищем в виде $y = kx$. Разделим второе уравнение в выражении (1.70) на первое. Получим

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x - 4y}{-3x + 2y}.$$

Подставим в последнее уравнение $y = kx$. В результате получим уравнение для определения k :

$$k = \frac{1 - 4k}{-3 + 2k}.$$

Это уравнение сводится к квадратному уравнению $2k^2 + k - 1 = 0$. Его корни будут следующими: $k_1 = -1,\ k_2 = \frac{1}{2}$. Следовательно, $y = -1$ и $y = \frac{1}{2}x$ — искомые прямые. Остальные фазовые кривые — части парабол, касающиеся в начале координат прямой $y = \frac{1}{2}x$. Их схематически можно построить, например методом изоклин. То, что эти параболы касаются именно прямой $y = \frac{1}{2}x$, следует из того, что собственный вектор $\{2; 1\}$ матрицы коэффициентов данной системы, соответствующий собственному числу $\lambda = -2$, является параллельным прямой $y = \frac{1}{2}x$. Фазовый портрет системы приведен на рис. 10.

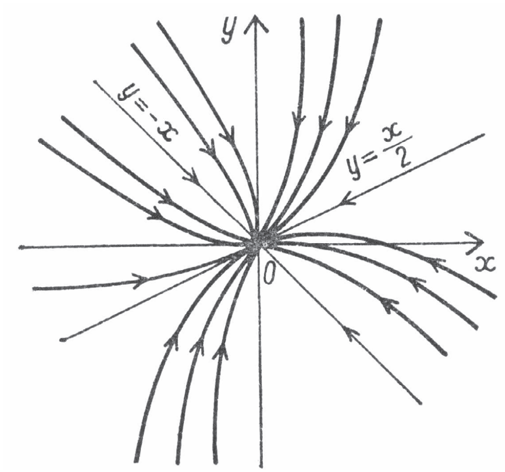

Рис. 10. Фазовый портрет системы (1.69)

Пример 2. Найти все положения равновесия, установить их тип. Построить фазовый портрет системы

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} &= x(x + y - 2), \\ \frac{dy}{dt} &= y(1 - x). \end{cases} \tag{1.71}$$

Приравняв правые части системы в нулю, получим условия для нахождения точек покоя системы. Имеем

$$\begin{cases} x(x + y - 2) &= 0, \\ y(1 - x) &= 0. \end{cases} \tag{1.72}$$

Решая эту систему, получаем координаты точек покоя: $0(0;0)$, $0_1(1;1)$, $0_2(2;0)$. Линеаризуя систему (1.71) в окрестности точки $0(0;0)$, получим систему

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} &= -2x, \\ \frac{dy}{dt} &= y. \end{cases} \tag{1.73}$$

Характеристическое уравнение для системы (1.73) будет следующим $(-2-\lambda)(1-\lambda)=0$. Корни характеристического уравнения $\lambda_1=-2$, $\lambda_2=1$. Следовательно, положение равновесия — седло. Нетрудно видеть, что оси координат являются фазовыми кривыми.

Если мы линеаризуем систему (1.73) в окрестности точки $0_1(1;1)$ (сделаем в системе (1.73) замену $u=x-1$, $v=y-1$ и отбросим слагаемые, имеющие порядок выше первого), то получим систему

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} &= u+v, \\ \frac{dv}{dt} &= -u. \end{cases}$$

Характеристическое уравнение имеет вид $\lambda^2-\lambda+1=0$. Корни этого уравнения $\lambda_{1,2}=\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Следовательно, данная точка покоя — неустойчивый фокус.

Теперь рассмотрим точку покоя $0_2(2;0)$. Линеаризуем систему (1.73) в окрестности точки $0_2(2;0)$. Сделав замену $u=x-2$, $v=y$ в системе (1.73)и отбросив слагаемые порядка выше первого, получим

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} &= 2u+2v, \\ \frac{dv}{dt} &= -v. \end{cases} \tag{1.74}$$

Характеристическое уравнение $\lambda^2-\lambda-2=0$ имеет корни $\lambda_1=2$, $\lambda_2=-1$. Следовательно, точка покоя – седло. Одной асимптотой будет ось x, т. к. она является интегральной кривой. Вторую асимптоту будем искать в виде $v=ku$. Теперь разделим второе уравнение в выражении (1.74) на первое, получим

$$\frac{dv}{du}=\frac{-v}{2u+2v}.$$

Подставив в последнее уравнение $v=ku$ и произведя в нем элементарные преобразования, получим

$$k=\frac{-k}{2+k}.$$

Это уравнение имеет два корня: $k_1=0$, $k_2=-3$. Таким образом, у линеаризованной системы две асимптоты: первая $v=0$, которую мы уже знаем, и вторая $v=-3u$. Фазовые траектории исходной системы показаны на рис. 11.

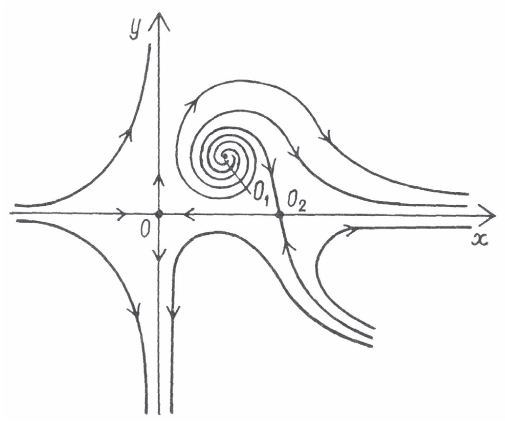

Рис. 11. Фазовый портрет системы (1.71)

15. Другие определения устойчивости

В определении А.М. Ляпунова идет речь об устойчивости невозмущенного движения по отношению к возмущениям начальных условий. Фактически это означает, что в определении А.М. Ляпунова рассматривается устойчивость по отношению к мгновенно действующим возмущениям. Однако реальная система обычно находится под действием небольших возмущающих сил (например, ветер, неоднородность окружающей среды и т.д.) на всем промежутке функционирования. Учесть все эти возмущения при составлении математической модели бывает невозможно, и поэтому представляет интерес исследование устойчивости математической модели по отношению к постоянно действующим возмущениям.

Наряду с уравнением (1.1) рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = f(t, x) + R(t, x). \tag{1.75}$$

Здесь $R(t, x)$ — некоторая неизвестная функция, характеризующая возмущающие факторы, в отношении которых известно только, что они малы и удовлетворяют некоторым условиям, обеспечивающим существование решений уравнения (1.75) в окрестности невозмущенного движения.

Определение 9. *Будем говорить, что невозмущенное движение $x = g(t)$ устойчиво по отношению к постоянно действующим возмущениям, если для всякого $\varepsilon > 0$ найдутся такие $\delta_1 > 0$ и $\delta_2 > 0$, что для всякого решения $x(t)$ уравнения* (1.75)*, удовлетворяющего неравенству $||x_0 - g(t_0)|| < \delta_1$, следует выполнение неравенства $||x(t) - g(t)|| < \varepsilon$ при всех $t > t_0$, каковы* *бы ни были функции* $R(t, x)$, *удовлетворяющие в области* $t > t_0$ *неравенству* $||R(t, x)|| < \delta_2$.

Данное определение является непосредственным обобщением понятия устойчивости по Ляпунову. Оказалось, что основные методы, разработанные для понятия устойчивости по Ляпунову, применимы и в этом случае.

Кроме определения устойчивости по Ляпунову, существуют и другие определения. В частности, под устойчивостью по Пуассону понимается свойство системы в процессе движения сколь угодно поздно возвращаться как угодно близко к своему начальному положению; под устойчивостью по Лагранжу понимают свойство системы в процессе движения оставаться в ограниченной области фазового пространства; под орбитальной устойчивостью понимается свойство возмущенной траектории находиться в окрестности невозмущенной траектории (здесь под невозмущенной траекторией понимается множество точек в пространстве, из которых состоит траектория). Подробно с этими понятиями можно познакомиться, например в [17].

Глава 2

Стабилизация динамических систем

1. Постановка задач стабилизации

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{y}(t) = F(t, y(t), u), \tag{2.1}$$

где t — независимая переменная, обычно называемая временем, $y(t) \in \mathbb{R}^n$; $u = u(t, y(t))$ — m-мерная вектор-функция, называемая управлением, значения которой принадлежат области управления $U \in \mathbb{R}^m$. Предположим, что система (2.1) описывает движение какого-либо объекта в фазовом пространстве $\mathbb{R}^n$ и требуется переместить объект из точки $y_0 = y(t_0)$ в точку $y_1 = y(t_1)$ $(t_1 > t_0)$ с помощью управления $u(t, y(t))$. Если такое управление существует, то система (2.1) называется *управляемой* на отрезке $[t_0, t_1]$. Далее предположим, что система (2.1) управляемая.

Наряду с невозмущенным движением $y(t) = 0$, соответствующим некоторому управлению $u = \hat{u}(t, y)$, будем рассматривать возмущенные. Предполагается, что возмущенные движения описываются той же системой уравнений, но при u, отличных от $\hat{u}(t, y)$. Задача стабилизации невозмущенного движения $y(t) = 0$ состоит в следующем.

Задача 1 (о стабилизации). *Найти управляющие воздействия* $u = u^0(t, y)$, *при которых тривиальное решение системы* (2.1) *становится асимптотически устойчивым.*[1]

Если при управлении u тривиальное решение системы (2.1) становится асимптотически устойчивым, то такое управление называют *стабилизирующим.* Из постановки задачи ясно, что функции u должны удовлетворять равенству $u(t, 0) = 0$. Далее будем также предполагать, что функции u определены и непрерывны в области

$$t \geq 0, \qquad |y_k| < H, \quad (k = 1, \ldots, n). \tag{2.2}$$

[1]Можно также изучать задачу о стабилизации, которая содержит более слабое требование — лишь устойчивости заданного движения $y(t) = 0$.

Кроме того, будем предполагать, что функции F и u удовлетворяют условиям, которые обеспечивают существование и единственность решений y при любых начальных условиях из области (2.2).

Количество управлений, решающих задачу 1, бесконечно велико. Для того чтобы выделить из них одно, рассматривают также задачу оптимальной стабилизации, в которой требуется осуществить стабилизацию с наилучшим результатом в смысле заданного критерия качества. Этот критерий отражает пожелание о наилучшем качестве возмущенного движения в процессе его приближения к состоянию $y = 0$ при $t \to \infty$ и может, например, носить смысл затрат ресурсов (энергии, массы, времени и т.д.), необходимых для формирования управляющих воздействий. Критерий качества обычно имеет вид интеграла

$$J(u) = \int\limits_{t_0}^{\infty} g(t, y(t), u(t, y))\, dt, \tag{2.3}$$

где g — неотрицательная функция, определенная в области (2.2). Управление u должно быть выбрано так, чтобы величина интеграла была минимальной. Выбор функции g определяется особенностями конкретной прикладной задачи, но обычно она выбирается такой, чтобы решение задачи не оказалось слишком трудным. Итак, задачу об оптимальной стабилизации невозмущенного движения $y \equiv 0$ можно сформулировать следующим образом:

Задача 2 (об оптимальной стабилизации). *Найти управляющее воздействие $u = u^0(t, y)$, которое обеспечивает асимптотическую устойчивость тривиального решения системы* (2.1) *и одновременно минимизирует функционал* (2.3) *для всех начальных условий $t_0 \geq 0$, $y(t_0)$ из области*

$$t_0 \geq 0, \quad |y_k(t_0)| \leq \eta, \quad (k = 1, \ldots, n), \tag{2.4}$$

где $\eta > 0$ — некоторая заданная постоянная.

Минимизация функционала означает, что какое бы ни было другое управляющее воздействие $u^* = u^*(t, y)$, решающее задачу 1, должно выполняться неравенство

$$J(u^0) = \int\limits_{t_0}^{\infty} g(t, y^0(t), u^0(t))\, dt \leq J(u^*) = \int\limits_{t_0}^{\infty} g(t, y^*(t), u^*(t))\, dt,$$

в котором u^0 — решение задачи 2. Функции $u^0(t, y)$, разрешающие задачу 2, будем называть *оптимальным управлением*. Как правило, задача 2 имеет единственное решение.

2. Основная теорема об оптимальной стабилизации

В этом разделе будет приведена основная теорема второго метода Ляпунова исследования проблем оптимальной стабилизации.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений возмущенного движения (2.1), где функция F определена в области (2.2) и удовлетворяет в этой области всем условиям из предыдущего подраздела. Пусть $V(t, y)$ — функции Ляпунова, определенно-положительные в области (2.2). Обозначим через $B(V, t, y, u)$ следующее выражение:

$$B(V, t, y, u) = \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial y_i} f_i(t, y, u) + g(t, y, u). \tag{2.5}$$

Здесь g — функция, определяющая показатель качества регулирования (2.3), f_i — элементы вектор-функции F.

Очевидно, если при некотором выборе функции $V(t, y)$ и функций $u = u^*(t, y)$ в области (2.2) выполняется равенство

$$B(V, t, y, u^*) = 0, \tag{2.6}$$

то это означает, что производная $\dfrac{dV}{dt}$ функции V в силу системы (2.1) при $u = u^*(t, y)$ удовлетворяет в этой области равенству

$$\frac{dV}{dt} = -g(t, y, u^*(t, y)). \tag{2.7}$$

Основная теорема об оптимальной стабилизации может быть сформулирована следующим образом.

Теорема 18. *Если для системы дифференциальных уравнений возмущенного движения* (2.1) *можно найти допускающую бесконечно малый высший предел определенно положительную функцию* $V^0(t, y)$ *и функции* $u^0(t, y)$, *удовлетворяющие в области* (2.2) *условиям:*

1) *функция* $\hat{g}(t, y) = g(t, y, u^0)$ *является определенно положительной;*

2) *справедливо равенство*

$$B(V^0, t, y, u^0) = 0; \tag{2.8}$$

3) *каково бы ни было и справедливо неравенство*

$$B(V^0, t, y, u) \geq 0, \tag{2.9}$$

то функции $u^0(t,y)$ разрешают задачу 2 об оптимальной стабилизации. При этом выполняется равенство

$$\int\limits_{t_0}^{\infty} g(t, y^0(t), u^0(t))\,dt = \min_u \int\limits_{t_0}^{\infty} g(t, y(t), u(t))\,dt = V^0(t_0, y_0). \tag{2.10}$$

Функции V, удовлетворяющие условиям теорем Ляпунова об асимптотической устойчивости, не только устанавливают сам факт устойчивости, но и позволяют оценить область

$$|y_k(t_0)| \le \eta, \quad (k = 1, \ldots, n) \tag{2.11}$$

тех начальных возмущений $y_k(t_0)$, для которых выполняются неравенства

$$|y_k| < H, \quad (t \ge t_0,\ k = 1, \ldots, n) \tag{2.12}$$

и предельное соотношение

$$\lim_{t\to\infty} y_k(t) = 0. \tag{2.13}$$

При $u = u^0(t,y)$ в системе (2.1) функция V^0 удовлетворяет условиям теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости. Число η, определяющее область (2.11), может быть найдено из соотношения

$$\sup_{|y_k|\le\eta} \{V^0(t,y)\} < \inf_{\max(|y_1|,\ldots,|y_n|)=h} \{V^0(t,y)\}, \tag{2.14}$$

где h — некоторое положительное число, меньшее чем H $\quad (t \ge t_0 \ge 0)$. Будем считать число h фиксированным.

Утверждение, выражаемое неравенством (2.10), надо понимать в следующем смысле: при $u = u^0(t,y)$ интеграл (2.3) достигает наименьшего значения для всех начальных условий $y_k(t_0)$ $(t_0 \ge 0)$ из области (2.11), где число η выбрано в соответствии с неравенством (2.14).

Доказательство. При $u = u^0(t,y)$ функция V^0 удовлетворяет всем условиям теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости. Ее производная $\frac{dV^0}{dt}$ в силу системы (2.1) (при $u = u^0$) определяется равенством

$$\frac{dV^0}{dt} = -g(t, y, u^0) \tag{2.15}$$

и, следовательно, является функцией определенно-отрицательной. Поэтому воздействия u^0 обеспечивают асимптотическую устойчивость невозмущенного движения $y = 0$ и выполнение предельного соотношения (2.13) для всех начальных условий $y(t_0)$ из области (2.11), (2.14).

Теперь для доказательства теоремы достаточно проверить справедливость соотношения (2.10). Сделаем это. Движения $y_k^0(t)$ при условии (2.11), (2.14) удовлетворяют неравенству $|y_k^0(t)| \le h < H$. Следовательно, вдоль таких движений при всех $t \ge t_0$ выполняется равенство (2.8) или равенство (2.15). Кроме того, вследствие асимптотической устойчивости выполняется предельное соотношение

$$\lim_{t\to\infty} V^0(t, y^0(t)) = 0. \tag{2.16}$$

Интегрируя равенство (2.15) вдоль движения $y_k^0(t)$ в пределах от $t = t_0$ до $t = \infty$ и учитывая (2.16), получим

$$V^0(t_0, y(t_0)) = \int\limits_{t_0}^{\infty} g(t, y^0(t), u^0(t, y^0(t)))dt. \tag{2.17}$$

С другой стороны, пусть $u^*(t, y)$ — какая-либо функция, также решающая задачу о стабилизации движения $y = 0$ для начальных возмущений из области (2.11). Примем сначала, что соответствующее движение $y^*(t)$ не выходит при $t \ge t_0$ из области $|y_k| \le h$. Тогда в процессе движения $y_k^*(t)$ все время будет выполняться неравенство (2.9) или, иначе говоря, будет выполняться условие

$$\frac{dV^0}{dt} \ge -g(t, y^*(t), u^*(t, y^*(t))). \tag{2.18}$$

Здесь $\frac{dV^0}{dt}$ — производная функции V^0 вдоль движения $y^*(t)$. Интегрируя неравенство (2.18) от $t = t_0$ до $t = \infty$ и снова учитывая предельное соотношение

$$\lim_{t\to\infty} V^0(t, y^*(t)) = 0, \tag{2.19}$$

получим

$$V^0(t_0, y(t_0)) \le \int\limits_{t_0}^{\infty} g(t, y^*(t), u^*(t, y^*(t)))dt. \tag{2.20}$$

Аналогичное неравенство получается и в том случае, когда движение $y^*(t)$ на время покидает область

$$|y_k| \le h \qquad (k = 1, \ldots, n). \tag{2.21}$$

Действительно, в последнем случае имеет место следующая ситуация. Пусть $\tau > t_0$ — момент времени, когда движение $y^*(t)$ в последний раз вошло в область (2.21) и уже при $t \geq \tau$ не покидает эту область. Тогда с этого момента вдоль движения $y^*(t)$ все время выполняется условие (2.18). Интегрируя это неравенство от $t = \tau$ до $t = \infty$ и учитывая опять предельное соотношение (2.19), получим

$$V^0(\tau, y^*(\tau)) \leq \int\limits_{\tau}^{\infty} g(t, y^*(t), u^*(t, y^*(t)))dt. \tag{2.22}$$

Но по выбору $y(t_0)$ из области (2.11), (2.14) справедливо неравенство

$$V^0(t_0, y(t_0)) < V^0(\tau, y^*(\tau)), \tag{2.23}$$

а вследствие неотрицательности функции g имеем

$$\int\limits_{\tau}^{\infty} g(t, y^*(t), u^*(t, y^*(t)))dt < \int\limits_{t_0}^{\infty} g(t, y^*(t), u^*(t, y^*(t)))dt. \tag{2.24}$$

Из (2.22)—(2.24) снова следует справедливость неравенства (2.20). Соотношения (2.17) и (2.20) доказывают (2.10). □

Итак, для решения задачи 2 об оптимальной стабилизации следует попытаться найти функции V^0 и u^0, удовлетворяющие условиям рассмотренной теоремы. При этом необходимо обеспечить выполнение равенства (2.8), которое является уравнением в частных производных относительно искомой функции V^0. Уравнение (2.8) надо разрешить с учетом дополнительного условия (2.9). В результате получается достаточно трудная задача. Однако можно указать некоторые типы систем (2.1), для которых функция V^0 строится в замкнутой форме. Отыскание этих типов уравнений и построение соответствующих функций V^0 облегчаются известными результатами теории устойчивости движения. В частности, для линейных систем, как и в обычных задачах устойчивости, полезным аппаратом исследования являются функции V^0 в виде квадратичных форм.

3. Стационарная линейно-квадратичная задача

Одной из наиболее хорошо изученных задач стабилизации является линейно-квадратичная задача управления, то есть задача управления линейными системами с квадратичным критерием качества. Рассмотрим ее стационарный случай, т. е. случай, в котором матрицы системы и критерия качества не зависят от времени. Система и критерий качества имеют вид

$$\dot{y} = Ay + Bu, \quad y(0) = y_0, \tag{2.25}$$

$$J(u) = \int_0^{\infty} \left[y^T N_1 y + u^T N_0 u \right] dt, \tag{2.26}$$

где A, B, N_1, N_0 — постоянные матрицы размерностей $n \times n$, $n \times m$, $n \times n$, $m \times m$ соответственно. Кроме того, матрицы N_0 и N_1 — симметричные и положительно определенные, ^{T} — значок транспонирования. Отметим, что значение функционала качества не изменится при замене начального момента времени $t_0 = 0$ на произвольный момент t_0.

Функция V для этой задачи зависит только от y и имеет вид

$$V(y) = y^T P y, \tag{2.27}$$

где P — постоянная, положительно определенная, симметричная матрица размерности $n \times n$, которая подлежит определению. Тогда оптимальное управление определяется формулой

$$u^0(t, y) = u^0(y) = -N_0^{-1} B^T P y. \tag{2.28}$$

Матрица P в формулах (2.27), (2.30) является решением уравнения

$$A^T P + PA - PBN_0^{-1} B^T P + N_1 = 0, \tag{2.29}$$

которое называется *алгебраическим уравнением Риккати.*

Приведем теорему, которая дает условия, при которых уравнение (2.29) имеет единственное положительно определенное решение P.

Теорема 19. *Пусть в задаче* (2.25), (2.26) *выполнены условия*

$$\operatorname{rank}(B, AB, \ldots, A^{n-1}B) = n,$$

матрицы N_0, N_1 — симметричные и положительно определенные. Тогда уравнение (2.29) *имеет единственное положительно определенное решение P и справедливы соотношения* (2.27), (2.26)*. Управление* (2.29) *обеспечивает в системе* (2.25) *свойство асимптотической устойчивости и выполняется равенство*

$$\min_u J(u) = J(u^0) = y_0^T P y_0.$$

Таким образом, при постоянных матрицах A, B, N_0, N_1 решение задачи стабилизации сводится к построению положительно определенного решения уравнения (2.29).

Покажем теперь, что при выполнении условий теоремы 19 программное движение в системе (2.25) можно сделать асимптотически устойчивым путем надлежащего выбора автоматической системы прямого регулирования, при этом регулирование можно осуществлять с помощью сигнала, являющегося линейной комбинацией отклонений истинного движения от заданного программного. Пусть для простоты $r = 1$, т.е. имеется один орган управления.

Теорема 20. *При условии полной управляемости системы* (2.25) *можно так выбрать управление* $u = \sum\limits_{j=1}^{n} c_j x_j(t)$*:* $c_j = const$ *(*c_j *— компоненты вектора* C*) таким образом, чтобы корни* μ_j *соответствующего определителя* $\Delta(\mu) = \det|A + BC - \mu E| = 0$ *имели отрицательную вещественную часть.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Введем в рассмотрение матрицу S, j-ый столбец которой имеет вид A^{j-1}B.

Сделаем в системе (2.25) замену искомых функций по формуле $X = S\bar{X}$. Тогда для новой искомой векторной функции $\bar{X}$ получим систему уравнений
$$\frac{d\bar{X}}{dt} = S^{-1}AS\bar{X} + S^{-1}BU. \tag{2.30}$$

Так как
$$S^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$
и вектор A^nB может быть разложен по векторам $B, AB, \ldots, A^{n-1}B$ как по базису, причем это разложение представимо в форме
$$A^nB = -p_nB - p_{n-1}AB - \ldots - p_1A^{n-1}B,$$
то система (2.25) после очевидных преобразований примет вид
$$\left.\begin{aligned} \frac{d\bar{x_1}}{dt} &= -p_n\bar{x_n} + U \\ \frac{d\bar{x}_s}{dt} &= \bar{X_{s-1}} - p_{n-s+1}\bar{x_n}, s = 2, \ldots, n. \end{aligned}\right\} \tag{2.31}$$

Положим в системе (2.31)
$$U = \sum_{k=1}^{n} c_k\bar{x_k}.$$
Полученную в результате этого преобразования систему будем обозначать как (*).

Обозначим через $\Delta(\lambda)$ характеристический определитель системы (*). Найдем аналитическое выражение функции $\Delta(\lambda)$. Первая строка определителя имеет вид

$$c_1 - \lambda, c_2, c_3, \ldots, c_n - p_n.$$

Представим $\Delta(\lambda)$ в виде суммы двух определителей, первый из которых будет иметь в качестве первой строки

$$-\lambda, 0, \ldots, 0, -p_n,$$

а второй

$$c_1, c_2, \ldots, c_n.$$

Раскрывая первый определитель, найдем, что он имеет вид $(-1)^n P_n(\lambda)$, где

$$P_n(\lambda) = \lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + \ldots + p_n.$$

Для второго определителя, разлагая его по элементам первой строки, получаем аналитическое выражение

$$(-1)^{n-1}\sum_{k=1}^{n} c_k P_{n-k}(\lambda),$$

где

$$P_{n-k}(\lambda) = \lambda^{n-k} + p_1\lambda^{n-k-1} + \ldots + p_{n-k};$$

$$P_0 = 1,$$

так что

$$\Delta(\lambda) = (-1)^n \left[P_n(\lambda) - \sum_{k=1}^{n} c_k P_{n-k}(\lambda) \right].$$

Таким образом, характеристическое уравнение системы (*) будет иметь вид

$$P_n(\lambda) - \sum_{k=1}^{n} c_k P_{n-k}(\lambda) = 0. \tag{2.32}$$

Обозначим через $\bar{a}_j$ коэффициент, стоящий в левой части (2.32) при λ^{n-j}, получающийся после приведения подобных. Легко видеть, что справедливы следующие формулы:

$$\left.\begin{aligned} \bar{a}_1 &= p_1 - c_1; \\ \bar{a}_2 &= p_2 - c_1 p_1 - c_2; \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \bar{a}_j &= p_j - \sum_{k=1}^{j} c_k p_{j-k}; \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \bar{a}_n &= p_n - \sum_{k=1}^{n} c_k p_{n-k}; \\ p_0 &= 1. \end{aligned}\right\}. \tag{2.33}$$

Из этих формул вытекает, что числа $c_1, \dots, c_n$ можно выбирать так, чтоб характеристическое уравнение (2.32) системы (*) имело наперед заданные корни $\mu_1, \dots, \mu_n$. Действительно, обозначим через $q_1, \dots, q_n$ коэффициенты уравнения

$$\lambda^n + q_1^{n-1} + \dots + q_n = 0, \tag{2.34}$$

имеющего корни $\mu_1, \dots, \mu_n$. Положим

$$c_j = p_j - \sum_{k=1}^{j-1} c_k p_{j-k} - q_j, j = 1, \dots, n. \tag{2.35}$$

При таком выборе чисел $c_1, \dots, c_n$ характеристическое уравнение (2.32) системы (*) будет иметь корни $\mu_1, \dots, \mu_n$. Пусть $\operatorname{Re}\,\mu_j < 0,\ j = 1, \dots, n$. В этом случае система (*) будет иметь асимптотически устойчивое нулевое решение.

Сделаем над системой (*) обратное преобразование $\bar{Y} = S^{-1}Y$. Тогда она примет вид

$$\frac{dY}{dt} = AY + B\sigma, \tag{2.36}$$

где

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k y_k.$$

Вектор

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix}$$

связан с вектором

$$C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

соотношением

$$(S^{-1})^* C = \Gamma.$$

Эта система будет экспоненциально устойчива. □

З а м е ч а н и е 1. В ходе доказательства теоремы 20 дан конструктивный метод построения системы автоматического управления, обеспечивающей асимптотическую устойчивость программного движения [13]; при этом коэффициенты усиления регулятора $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ определяются в замкнутой форме через элементы матрицы A и вектора B.

З а м е ч а н и е 2. В ходе доказательства теоремы 20 установлено, что коэффициенты усиления $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ можно выбрать так, чтобы обеспечить любой заданный характер затухания переходных процессов, возникающих в ходе автоматического управления.

Действительно, выше было показано, что величины $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ можно выбрать так, чтобы система (2.25) при выбранном управлении u имела наперед заданные собственные числа $\mu_1, \ldots, \mu_n$.

Условие полной управляемости в теореме 20 является, вообще говоря, излишне жестким. Определим подход к построению системы автоматического управления, обеспечивающей асимптотическую устойчивость программного управления для тех случаев, когда данное условие может не выполняться.

Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ есть собственные числа матрицы A. Предположим, что среди них имеются в точности k таких, у которых вещественные части неотрицательны. Тогда неособым линейным преобразованием над искомыми функциями линейную систему (2.25) можно привести к виду [8]

$$\left.\begin{aligned} \frac{dY_1}{dt} &= A_1 Y_1 + B_1 U; \\ \frac{dY_2}{dt} &= A_2 Y_2 + B_2 U, \end{aligned}\right\} \tag{2.37}$$

где вектор X_1 имеет размерность k; вектор X_2 - размерности $n-k$; A_1 и A_2 — матрицы соответственно размерностей k и $n-k$; B_1 и B_2 — векторы тех же размерностей, что и X_1 и X_2. Матрица A_1 имеет собственные числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ с неотрицательными вещественными числами.

Теорема 21. *Если векторы $B_1, A_1B_1, A_1^2B_1, \ldots, A_1^{k-1}B_1$ линейно независимы, то можно построить автоматическую систему управления, при ис-*

пользовании которой программное движение $X_p(t)$ оказывается асимптотически устойчивым по Ляпунову.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Как следует из доказательства теоремы 20, для первой группы уравнений системы (2.37) можно выбрать управление

$$U = \sum_{j=1}^{k} c_j y_j^{(1)} \tag{2.38}$$

так, чтобы нулевое решение этой системы было асимптотически устойчивым. Очевидно также, что при данном управлении оказывается асимптотически устойчивым нулевое решение системы (2.37), а следовательно, и (2.25). Разумеется, при обратном переходе к системе (2.37) это управление подвергнется линейному преобразованию. Из асимптотической устойчивости нулевого решения системы (2.37) при таком управлении будет вытекать асимптотическая устойчивость исходной системы. □

При доказательстве теоремы 20 был использован тот факт, что собственными числами матрицы A_1 являются числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, а собственными числами матрицы A_2 - числа $\lambda_{k+1}, \ldots, \lambda_n$,которые имеют отрицательные вещественные части согласно ранее сделанному предположению. Если векторы $B_1, A_1B_1, \ldots, A_1^{k-1}B_1$ оказываются линейно зависимыми, то, вообще говоря, невозможно построить автоматическую систему управления, обладающую тем свойством, что программное движение системы (2.37) становится асимптотически устойчивым. В этом случае можно указать, однако, ряд таких частных случаев, в которых оказывается все же возможным построить систему автоматического управления, стабилизирующую программное движение. Предположим, что среди чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ имеются l собственных чисел с нулевыми вещественными частями (пусть это будут $\lambda_1, \ldots, \lambda_l$), причем таких, которым отвечают простые элементарные делители. Неособым линейным преобразованием над искомыми функциями, входящими в систему (2.37), ее можно будет привести к следующему виду:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dX_1}{dt} &= \bar{A}_1 X_1 + \bar{B}_1 U; \\ \frac{dX_2}{dt} &= \bar{A}_2 X_2 + \bar{B}_2 U; \\ \frac{dX_3}{dt} &= \bar{A}_3 X_3 + \bar{B}_3 U, \end{aligned}\right\} \tag{2.39}$$

где X_i и $\bar{B}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ — векторы размерностей соответственно $l, k-l, n-k$. Собственными числами матрицы A_1 являются числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_l$. Таким образом, мы "расщепили"исходную систему на устойчивую систему и системы, которые требуют стабилизации.

Приведем еще один алгоритм стабилизации системы (2.25) [20]. Если в системе (2.25) управление u выбрать следующим образом

$$u = -B^\top \bar{\Gamma} x \tag{2.40}$$

где $\bar{\Gamma}$ — симметричная, положительно определенная матрица, являющаяся решением уравнения [20, с. 96]

$$\bar{\Gamma} A + A^\top \bar{\Gamma} - 2\bar{\Gamma} B B^\top \bar{\Gamma} = -\alpha \bar{\Gamma}, \tag{2.41}$$

где $\alpha = const,\ 0 < \alpha$, то избранный закон стабилизации будет оптимальным по принуждению. Если теперь рассмотреть функцию Ляпунова в виде $V = y^T \Gamma y$, то ее производная $\frac{dV}{dt}$, составленная на решении стабилизированной таким образом системы (2.25) будет равна выражению $-\alpha V$. Ввиду того, что при $\alpha \to \infty$ элементы матрицы $\bar{\Gamma}$ становятся весьма большими, данный метод стабилизации иногда позволяет достаточно эффективно стабилизировать по первому приближению нелинейные системы, (когда линейная система неустойчива). Разрешимость уравнения (2.41) в случае, когда матрица A^{-1} существует сводится к решению линейного уравнения для обратной матрицы $\bar{\Gamma}^{-1}$. Получаем

$$A\bar{\Gamma}^{-1} + \bar{\Gamma}^{-1} A^\top - 2BB^\top = -\alpha \bar{\Gamma}^{-1}. \tag{2.42}$$

Данное (линейное) уравнение разрешимо, например, с помощью пакета прикладных программ $MATLAB$. Если же обратная матрица A^{-1} не существует при условии полной управляемости системы (2.25) ищем решение достаточно близкой системы

$$\bar{\Gamma} A + A^\top \bar{\Gamma} - 2\bar{\Gamma} B B^\top \bar{\Gamma} = -\alpha \bar{\Gamma} - \delta E. \tag{2.43}$$

Здесь E — единичная матрица размерности $n \times n$, δ — достаточно малое положительное число. Уравнение (2.43) разрешимо при полной управляемости системы (2.25) при любых малых $\delta > 0$.

Пример. Рассмотрим задачу о стабилизации маятника в вертикальной плоскости, имеющего точку подвеса внизу. Полагаем, что управляющее воздействие u является скалярной величиной. Управляемая система (учитывая (1.23)), имеет вид

$$\dot{x}_1 = x_2 \tag{2.44}$$

$$\dot{x}_2 = a_1 x_1 + u. \tag{2.45}$$

Здесь константа $a_1 > 0$, т.к. точка подвеса находится внизу. В данном случае можно найти матрицу $\bar{\Gamma}$ непосредственно из уравнения (2.41) при $\delta = 0$. Имеем

$$\bar{\Gamma} = \begin{pmatrix} \frac{(\alpha^2-2a_1)}{2} & 0.5\alpha^2 \\ 0.5\alpha^2 & \alpha \end{pmatrix}$$

Отсюда имеем закон управления $u = -0.5\alpha^2 x_1 - \alpha x_2$. При $\alpha^2 > 4a_1$ получаем решение задачи стабилизации. Рассмотрим теперь стабилизированное уравнение

$$\dot{x}_2 = a_1 x_1 - 0.5\alpha^2 x_1 - \alpha x_2. \tag{2.46}$$

Очевидно, его правая часть стремится к бесконечности при возрастании α, следовательно, данную систему можно стабилизировать по первому приближению при любых достаточно больших возмущениях правой части уравнения (2.45).

4. Построение оптимальной функции Ляпунова в случае нестационарных линейных систем

Рассмотрим теперь частный случай, когда возмущенное движение объекта описывается уравнениями

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)x_j + \sum_{s=1}^{r} b_{is}(t)u_s, \tag{2.47}$$

$$(\text{i} = 1, \ldots, \text{n}),$$

где $a_{ij}(t), b_{ij}(t), (i, j = 1, \ldots, n; s = 1, \ldots, r)$ - ограниченные непрерывно дифференцируемые функции времени t , в частности они могут быть и постоянными.

Достаточным условием полной управляемости нестационарных линейных однородных систем является требование относительно ранга матрицы $\bar{L}$ [?]:

$$\bar{L} = \{L_1, L_2, ...L_n\}. \tag{2.48}$$

$(L_1 = B(t), L_k = A(t)L_{k-1} - \frac{dL_{k-1}}{dt}$ $k = 2, 3...n$. Именно, полагаем (по аналогии с теоремой 19), что $rank(\bar{L}) = n$.

Пусть качество переходного процесса оценивается следующим функционалом

$$I[u] = \int_{t_0}^{\infty} \left(\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}(t)x_j x_j + \sum_{k,s=1}^{r} \beta_{ks}(t)u_k u_s \right) dt \tag{2.49}$$

где квадратичные формы $\sum\limits_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}(t)x_j x_j$ и $\sum\limits_{k,s=1}^{r} \beta_{ks}(t)u_k u_s$ предполагаются определенно положительными.

По аналогии с условиями теоремы 16.2 составим выражение [1]

$$\Phi(x,u,t) = \frac{dV}{dt} + \sum_{i=1}^{n} \frac{dV}{dx_i}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + \sum_{s=1}^{r} b_{is}u_s\right) + \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}x_i x_j + \sum_{k,s=1}^{r} \beta_{ks}u_k u_s. \tag{2.50}$$

Оптимальную функцию Ляпунова V(x,t), которая удовлетворяла бы условиям указанной теоремы, будем искать в виде квадратичной формы

$$V(x,t) = \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij}(t)x_i x_j \tag{2.51}$$

Функция $\Phi(x,u,t)$ при $u_j = u_j(x,t)$ должна иметь минимум по u, равный нулю. Из данного условия получаем следующие (r+1) соотношений:

$$\frac{dV}{dt} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + \sum_{s=1}^{r} b_{is}u_s\right) + \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}x_i x_j + \sum_{k,s=1}^{r} \beta_{ks}u_k u_s = 0, \tag{2.52}$$

$$\sum_{i=1}^{n} b_{is}\frac{\partial V}{\partial x_i} + 2\sum_{k=1}^{r} \beta_{ks}u_k = 0, (s = 1, \dots, r). \tag{2.53}$$

Последние r уравнений (2.53), получающиеся приравниванием нулю частных производных от функций Φ по u_s, означают не что иное, как условие минимума. Полученные таким образом соотношения (2.52), (2.53) соответствуют, очевидно, уравнениям (2.29), записанным в частном случае задачи об оптимальной стабилизации (2.47), (2.49).

Уравнения (2.53) суть линейные неоднородные уравнения относительно неизвестных u_k и их можно разрешить относительно неизвестных u_k. Это можно сделать, так как форма $\sum\limits_{k,s=1}^{r} \beta_{ks}u_k u_s$ является определенно положительной в силу выбора критерия $I[u]$ (2.49), и, следовательно, ее дискриминант при всех $t \geq t_0$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \beta_{11} & \dots & \beta_{1r} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \beta_{r1} & \dots & \beta_{rr} \end{vmatrix} \geq \delta, \quad \delta > 0 \ \ (\delta = const).$$

Из уравнений (2.53) находим, что

$$u_k = -\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{r}\frac{\Delta_{sk}}{\Delta}\left(\sum_{i=1}^{n} b_{is}\frac{\partial V}{\partial x_i}\right), \tag{2.54}$$

$$(\mathrm{k} = 1, \ldots, \mathrm{r}) \ ,$$

где Δ_{sk} - алгебраическое дополнение элемента, стоящего на пересечении s -ой строки и k -ого столбца в определители Δ .

Поясним вывод соотношений (2.54) несколько подробнее. Для этого перепишем уравнение (2.53) в виде

$$\begin{array}{rl}
\beta_{11}u_1 + \beta_{21}u_2 + \cdots + \beta_{r1}u_r = & -\frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n} b_{i1}\frac{\partial V}{\partial x_i}, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\
\beta_{1r}u_1 + \beta_{2r}u_2 + \cdots + \beta_{rr}u_r = & -\frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n} b_{ir}\frac{\partial V}{\partial x_i}
\end{array} \tag{2.55}$$

Согласно правилу Крамера,

$$u_k^o = \frac{\Delta_k}{\Delta},$$

где

$$\Delta_k = \begin{vmatrix}
\beta_{11} & \ldots & \beta_{k-11} & -\frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n} b_{i1}\frac{\partial V}{\partial x_i} & \beta_{k+11} & \ldots & \beta_{r1} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\beta_{r1} & \ldots & \beta_{k-1r} & -\frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n} b_{ir}\frac{\partial V}{\partial x_i} & \beta_{k+1r} & \ldots & \beta_{rr}
\end{vmatrix}$$

Определитель Δ_k разложим по элементам k-ого столба по известному правилу: определитель равен сумме произведений элементов столбца на соответствующие алгебраические дополнения. Но алгебраическое дополнение элемента, стоящего на пересечении s-ой строки и k-ого столбца определителя Δ_k совпадает с алгебраическим дополнением соответствующего элемента β_{ks} определителя Δ . Следовательно,

$$\Delta_k = -\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{r}\Delta_{sk}\left(\sum_{i=1}^{n} b_{is}\frac{\partial V}{\partial x_i}\right), \tag{2.56}$$

$$(\mathrm{k} = 1, \ldots, \mathrm{r}) \ ,$$

В случае, когда управляющее воздействие u является скалярной функцией, уравнения для определения коэффициентов c_{ij} формы $V(x)$ приобретают вид

$$\frac{dc_{ij}(t)}{dt} + \sum_{k=1}^{n}(a_{ki}c_{kj} + a_{kj}c_{ki}) - \left(\sum_{l=1}^{n} b_l c_{lj}\right)\left(\sum_{m=1}^{n} b_m c_{mi}\right) + d_{ij} = 0 \quad (2.57)$$

Решение этого нелинейного дифференциального уравнения представляет серьезные трудности.

5. Оптимальная стабилизация неоднородных систем

Рассмотрим задачу об оптимальной стабилизации неоднородной системы, описываемой уравнениями

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + b_i u + \phi_i(t) \quad (2.58)$$

(i=1,2,...,n)

Система управляема скалярным воздействием u, при этом полагаем, что ранг матрицы $B, AB, \ldots, A^{n-1}B$ равен n. Кроме того, полагаем, что функции $\phi_i(t)$ $(i = 1, 2, ...n)$ непрерывны и удовлетворяют при $t \to \infty$ оценкам $|\phi_i(t)| \leq Me^{-\chi t}$: M, χ — положительные постоянные. Будем стабилизировать данную систему при условии минимума интеграла

$$I[u] = \int_{)}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + u^2\right) dt \quad (2.59)$$

Для определения оптимальной функции Ляпунова получаем уравнение

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + \psi_j(t)\right)\frac{\partial V}{\partial x_i} - \frac{1}{4}\left(\sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial V}{\partial x_i}\right) - \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0 \quad (2.60)$$

Оптимальное управление u^0 определяется равенством

$$u^0 = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial V}{\partial x_i} \quad (2.61)$$

Решение уравнения (2.60) находим в виде

$$V(x,t) = V^{(2)}(x) + V^{(1)}(x,t) + V^(0)(t), \quad (2.62)$$

где $V^{(2)}(x)$ — некоторая квадратичная форма с постоянными коэффициентами; $V^{(1)}(x)$ — форма первого порядка относительно x с переменными коэффициентами, $V^{(0)}(t)$ — функция времени t. Подставим данное решение в равенство (2.60). Приравнивая одинаковые степени при x_i, получаем следующие уравнения для определения величин $V^{(2)}(x), V^{(1)}(t,x), V^{(0)}(t)$:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right)\frac{\partial V^{(2)}}{\partial x_i} - \frac{1}{4}\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\frac{\partial V^{(2)}}{\partial x_i}\right) + \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0, \tag{2.63}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right)\frac{\partial V^{(1)}}{\partial x_i} - \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\frac{\partial V^{(2)}}{\partial x_i}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\frac{\partial V^{(1)}}{\partial x_i}\right) +$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\phi_i(t)\frac{\partial V^{(2)}}{\partial x_i} + \frac{\partial V^{(1)}}{\partial t} = 0 \tag{2.64}$$

$$\frac{dV^{(0)}(t)}{dt} + \sum_{i=1}^{n}\phi_i(t)\frac{\partial V^{(1)}}{\partial x_i} - \frac{1}{4}\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\frac{\partial V^{(1)}}{\partial x_i}\right)^2 = 0 \tag{2.65}$$

Теперь для завершения задачи нужно найти решение этих уравнений и тогда оптимальное управление будет найдено из (2.61).

Рассмотрим сначала решение первого из этих уравнений. Если теперь принять во внимание соотношения (2.58),(2.59), система первого приближения

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_j - \frac{1}{2}b_i\sum_{i=1}^{n} b_i\frac{\partial V^{(2)}}{\partial x_i}, \tag{2.66}$$

(i=1,2,...n)

асимптотически устойчива. Рассмотрим теперь уравнение (2.64). Если в нем перенести в правую часть предпоследнее слагаемое, то оставшиеся слагаемые представляют собой полную производную $\frac{dV^{(1)}(x,t)}{dt}$, т.е. получаем равенство

$$\left(\frac{dV^{(1)}(x,t)}{dt}\right) = -\sum_{i=1}^{n}\phi_i(t)\frac{\partial V^{(2)}}{\partial x_i} \tag{2.67}$$

Интегрируя данное уравнение в пределах от t до ∞ вдоль траектории $\xi(\tau, x_0, t)$ системы первого приближения, получаем соотношение

$$V^{(1)}(x,t) = -\int_t^{\infty}\sum_{i=1}^{n}\phi_i(t)\frac{\partial V^{(2)}(\xi(\tau,x_0,t))}{\partial x_i}d\tau. \tag{2.68}$$

Интеграл в правой части последнего равенства сходится абсолютно (ввиду экспоненциальной устойчивости системы первого приближения и экспоненциальной оценки для $\phi_i(t)$). Следовательно, возможно дифференцирование под знаком интеграла. Тогда, дифференцируя обе части равенства (2.68) x_k: $(k = 1, 2, ...n)$, получаем соотношения

$$\frac{\partial V^{(1)}(x,t)}{\partial x_k} = -\int_t^\infty \sum_{i,j=1}^{n} \phi_i(\tau) \frac{\partial^2 V^{(2)}(\xi(\tau, x_0, t))}{\partial x_i' \partial x_j} \frac{\partial \xi_j(\tau, x_0, t)}{\partial x_k} d\tau \tag{2.69}$$

(здесь значок ' в выражении $\partial x_i'$ означает отсутствие частной производной от $\xi_j(\tau, x_0, t)$ при $i = k$. Но отсюда следует оценка на величину

$$\left|\frac{\partial V^{(1)}(x,t)}{\partial x_k}\right| \leq N e^{-\beta t}, \tag{2.70}$$

где $N_1 = const$, $N_1 > 1$, $\beta = const$, $\beta > 0$.

Рассмотрим, наконец, уравнение (2.65). Имеем равенство

$$V^0(t) = \int_t^\infty \left[\frac{1}{4}\left(\sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial V^{(1)}}{\partial x_i}\right)^2 - \sum_{i=1}^{n} \phi_i(t) \frac{\partial V^{(1)}}{\partial x_i}\right] dt \tag{2.71}$$

В силу оценки (2.70) интеграл в правой части (2.71) сходится, т.е. оптимальная Ляпунова существует и задача оптимальной стабилизации решена.

Пример 1. Рассмотрим стабилизацию уравнения первого порядка

$$\dot{x} = x + u + e^{-t} \tag{2.72}$$

При этом минимизируется функционал

$$I[u] = \int_0^\infty (x^2 + u^2) dt \tag{2.73}$$

Как следует из (2.61) (2.63) (2.64) управление u находится из равенства

$$u = -\frac{1}{2}\frac{\partial V^{(2)}}{\partial x} - \frac{1}{2}\frac{\partial V^{(1)}}{\partial x}. \tag{2.74}$$

Для вычисления квадратичной формы $V^{(2)}(x)$ имеем уравнение

$$x\frac{dV^{(2)}}{dx} - \frac{1}{4}\left(\frac{dV^{(2)}}{dx}\right)^2 + x^2 = 0 \tag{2.75}$$

Будем искать его решение в виде $V^{(2)}(x) = cx^2 : c = const$, $c > 0$. Тогда из (2.65) получаем уравнение

$$c^2 - 2c - 1 = 0, \tag{2.76}$$

откуда $c = 1+\sqrt{2}$. Следовательно, $V^{(2)}(x) = (1+\sqrt{2})x^2$. Для определения $V^{(1)}(x,t)$ из (2.64) имеем уравнение

$$\frac{\partial V^{(1)}}{\partial t} - \sqrt{2}x\frac{\partial V^{(1)}}{\partial x} = -2(1+\sqrt{2})xe^{-t} \tag{2.77}$$

Будем искать форму $V^{(1)}(x)$ в виде $V^{(2)}(x) = c(t)e^{-t}$, $c(t)$ — функция, подлежащая определению. После подстановки $V^{(1)}(x)$ в (2.77), получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{dc(t)}{dt} = \sqrt{2}c(t) - 2(1+\sqrt{2})e^{-t} \tag{2.78}$$

Интегрируя это уравнение, получаем $c(t) = 2e^{-t}$. Окончательно, $V(x,t) = (1+\sqrt{2})x^2 + 2e^{-t}x$, откуда вычисляем оптимальное управление

$$u^0 = -(1+\sqrt{2})x - e^{-t} \tag{2.79}$$

Пример 2. Рассмотрим еще один простой иллюстрирующий пример. Пусть возмущенное движение описывается дифференциальным уравнением

$$\frac{dx}{dt} = ax + bu, \tag{2.80}$$

где a - некоторое положительное число и b — некоторая неравная нулю постоянная. Требуется выбором управления u сделать невозмущенное движение $x = 0$ асимптотически устойчивым при условии минимума следующего критерия качества переходного процесса

$$I[u] = \int_0^\infty (x^2 + u^2)dt. \tag{2.81}$$

Для решения задачи составим уравнение (2.50). В нашем случае эта система будет иметь вид

$$ax\frac{dV}{dx} = bu^0\frac{dV}{dx} + x^2 + (u^0)^2 = 0, \tag{2.82}$$

$$2u^0 + b\frac{dV}{dx} = 0. \tag{2.83}$$

Поскольку первая часть уравнения (2.80) и подынтегральная функция минимизируемого функционала (2.81) не зависят явно от времени, то оптимальную функцию Ляпунова V(x) и оптимальное управление $u^0(x)$ ищем также не зависящими явно от времени t, т.е. считаем, что $V = V(x)$ и $u^0 = u^0(x)$.

Из (2.83) находим, что

$$u^0 = -\frac{1}{2}b\frac{dV}{dx}. \tag{2.84}$$

Подставляя управление u^0 в уравнение (2.83) получим соотношение для определения оптимальной функции Ляпунова

$$ax\tfrac{dV}{dx} - \tfrac{1}{4}b^2(\tfrac{dV}{dx})^2 + x^2 = 0.$$

Решение последнего уравнения ищем в виде

$$V(x) = cx^2,\ \tfrac{dV}{dx} = 2cx.$$

Тогда искомый коэффициент c определится как корень квадратного уравнения

$$b^2c^2 - 2ac - 1 = 0,$$

которое получается, если подставить значение $V(x) = cx^2$ в уравнение для V и приравнять коэффициент при x^2 к нулю. Корни этого уравнения суть

$$c_1 = \tfrac{a}{b^2} + \sqrt{\tfrac{a^2}{b^4} + 1},\ c_2 = \tfrac{a}{b^2} - \sqrt{\tfrac{a^2}{b^4} + 1}.$$

Из условия определенной положительности функции $V(x)$ заключаем, что условиям задачи удовлетворяет лишь значение c_1 , т.е. оптимальная функции Ляпунова имеет вид

$$V(x) = (\tfrac{a}{b^2} + \sqrt{\tfrac{a^2}{b^4} + 1})x^2,$$

и следовательно, в силу (2.84), оптимальное управление определяется равенством

$$u^0(x) = -\tfrac{1}{b}(a + \sqrt{a^2 + b^4})x$$

и является, как мы видим, линейной функцией координаты x.

6. Стабилизация вполне управляемых консервативных систем

Будем считать, что уравнения возмущенного движения относительно величин q и $\dot{q}$ (q — обобщенные координаты) с помощью уравнений Лагранжа второго рода приведены к виду

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = \frac{\partial \Pi}{\partial q_k} + D_k + \Gamma_k. \tag{2.85}$$

Здесь $T = \frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{kj}\dot{q}_k\dot{q}_j$ — кинетическая энергия (определенно-положительная квадратичная форма скоростей $\dot{q}_j$). $D_k(q,\dot{q})$ — диссипативные силы (силы, обусловленные функцией Релея — функцией рассеивания). $D_k(q,\dot{q})$ — гироскопические силы (основное свойство их состоит в том, что сумма их работ на действительных перемещениях равна нулю). $\Pi(q)$ — потенциальная энергия системы, при этом полагаем, что в положении равновесия $q_1 = q_2 = ... = q_n$) $\Pi(0)$=0. Разлагая функции $D_k(q,\dot{q})$, $D_k(q,\dot{q})$ и Π в ряд и удерживая только линейные члены, получаем систему

$$A\ddot{q} + B_1\dot{q} + C_1 q + = 0 \tag{2.86}$$

Здесь A — определенно положительная, симметричная матрица, B_1 и C_1 — некоторые квадратные матрицы. Известно [16]: существует ортогональная матрица Λ, что совершая преобразование $q = \Lambda z$, получим систему

$$\ddot{z} + B_0\dot{z} + G\dot{z} + Cz + Pz = 0 \tag{2.87}$$

В этом соотношении C_0 и B_0 — диагональные матрицы с вещественными элементами. При этом потенциальные, гироскопические и диссипативные силы преобразуются в силы той же структуры. Очевидно, из устойчивости (неустойчивости) относительно координат z и $\dot{z}$ следует устойчивость (неустойчивость) относительно исходных координат q и $\dot{q}$.

Рассмотрим в уравнении (2.87) силу сопротивления $-B_0\dot{z}$ более подробно. Если коэффициент $b_k > 0$, то, решая соответствующее уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами, получаем, что соответствующая диссипативная сила $-b_k\dot{z}_l$ будет замедлять движение; если b_k противоположного знака, то соответствующая сила будет ускорять движение. Будем говорить, что диссипативные силы доминируют над ускоряющими, если $\sum b_k > 0$, и наоборот, если $\sum b_k < 0$, то ускоряющие силы доминируют над диссипативными. Так как след матрицы и ее определитель не меняются при ортогональном преобразовании, то вопрос о доминировании диссипативных или ускоряющих сил решается исходной системой.

Пусть на систему действуют только потенциальные силы, а все остальные отсутствуют. Тогда из (2.87), учитывая нелинейные члены $Z_j(z_j, \dot{z}_j)$ получаем равенство

$$\ddot{z} + C_0 z = Z_j \tag{2.88}$$

Линейная часть уравнения (2.88) содержит только одну координату (такие координаты называются нормальными). Характеристические числа k-го уравнения равны $\pm\sqrt{-c_k}$. Очевидно, для устойчивости линейной части системы (2.88) достаточно, чтобы $c_k > 0$. В случае наличия $c_k < 0$ движение будет неустойчиво, т.к. из двух характеристических чисел одно будет положительное, т.е. решение системы содержит член, возрастающий по экспоненте. При неустойчивости можно судить по знаку определителя матрицы C : если определитель матрицы потенциальных сил исходных уравнений возмущенного движения положителен, то степень неустойчивости четная; если же $\det C < 0$, то степень неустойчивости нечетная.

Для иллюстрации рассмотрим два простых примера.

Пример 1.

$$\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 + 5q_1 + 2q_2 = 0$$

$$\ddot{q}_1 + 3\ddot{q}_2 + 2q_1 - q_2 = 0$$

Система потенциальная, т.к. матрица

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix},$$

является симметрической. Ее определитель равен -9 — имеем нечетную степень неустойчивости. Поскольку система имеет две координаты, то имеется одна неустойчивая и одна устойчивая координаты.

Пример 2.

$$\ddot{q}_1 + q_1 + 5q_1 + 2q_2 = 0$$

$$\ddot{q}_2 - 3q_2 + 2q_1 + q_3 = 0$$

$$\ddot{q}_3 + 2q_1 + q_2 - q_3 = 0$$

Система потенциальная, т.к. матрица C, определенная следующим образом

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

симметрична. Ее определитель равен 14. Для выяснения вопроса об устойчивости, воспользуемся критерием Сильвестра, именно, определители главных диагональных миноров, соответственно, равны: $\Delta_1 = 1 > 0$, $\Delta_2 = -3 < 0$, $\Delta_3 = 14 > 0$, т.е. система неустойчива. Очевидно, число неустойчивых координат должно быть четным, т.е. равно двум.

В реальных условиях на потенциальную (консервативную) систему налагаются диссипативные силы (в частности, сопротивление среды). Кроме того, очень часто встречаются системы, на которые вдобавок действуют гироскопические силы (например, при автоматическом управлении летающими аппаратами).

Предположим, что невозмущенное движение $z = 0$, $\dot{z} = 0$ неустойчиво. Возникает вопрос: можно ли стабилизировать данное неустойчивое движение присоединив к данным потенциальным силам гироскопические? Приведем пример. Система

$$\ddot{z}_1 + c_1 z = 0,$$

$$\ddot{z}_2 + c_2 z = 0,$$

при отрицательных c_j, $j = 1, 2$ неустойчива. Присоединим к системе гироскопические силы $-g\dot{z}_2$, $g\dot{z}_1$, соответственно, получаем систему

$$\ddot{z}_1 + g\dot{z}_2 + c_1 z = 0$$

$$\ddot{z}_2 - g\dot{z}_1 + c_2 z = 0$$

Рассмотрим соответствующее характеристическое уравнение полученной системы

$$\det C = \det \begin{pmatrix} \lambda^2 + c_1 & g\lambda \\ -g\lambda & \lambda^2 + c_2 \end{pmatrix} = \lambda^4 + (g^2 + c_1 + c_2)\lambda^2 + c_1 c_2 = 0.$$

Имеем биквадратное уравнение. Очевидно, каждому вещественному корню λ будет соответствовать корень $-\lambda$ $\Rightarrow$ что этого уравнения должны быть чисто мнимыми, тогда величины λ^2 будут отрицательными. Но тогда получаем условия отрицательности вещественных корней квадратного уравнения

$$c_1 c_2 > 0, \;\; g^2 + c_1 + c_2 > 0, \;\; (g^2 + c_1 + c_2)^2 - 4c_1 c_2 > 0.$$

Эти три неравенства сводятся к одному $|g| > \sqrt{-c_1} + \sqrt{-c_2}$ (при этом мы учли, что $c_i < 0$. Отметим, что стабилизированное движение будет устойчиво, но не асимптотически.

Возникает вопро:всегда ли можно стабилизировать неустойчивую потенциальную систему гироскопическими силами? Ответ дает следующая теорема (Первая теорема Томсона-Тета-Четаева)

Теорема 22. *Если неустойчивость изолированного положения равновесия системы при одних потенциальных силах имеет нечетную степень, то гироскопическая стабилизация невозможна при любых членах, содержащих координаты и скорости в степени выше первой.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть потенциальная система (2.88) имеет нечетную степень неустойчивости. Присоединим к системе произвольные гироскопические силы $-G\dot{z}$ и, учитывая, что C_0 — диагональная, а G — кососимметрическая матрица, имеем характеристическое уравнение

$$\Delta = \det \begin{pmatrix} \lambda^2 + c_1 & g_{12}\lambda & .... & g_{1s}\lambda \\ g_{21}\lambda & \lambda^2 + c_2 & .... & g_{2s}\lambda \\ .... & .... & .... & .... \\ g_{s1}\lambda & g_{s2}\lambda & .... & \lambda^2 + c_s \end{pmatrix} = 0$$

Раскрывая данный определитель и группируя члены по степеням λ, получаем уравнение

$$\Delta = \lambda^{2s} + ... + a_{2s} = 0$$

При этом $a_{2s} = c_1 c_2 ... c_s$. Из условий теоремы следует, что $a_{2s} < 0$. Действительно, нулевых корней нет, число отрицательных коэффициентов нечетное, т.е. среди корней данного характеристического уравнения имеется хотя бы один корень с положительной вещественной частью, но тогда среди решений уравнения

$$\ddot{z} + G\dot{z} + C_0 z = 0$$

имеется экспоненциальный член с положительным показатепем; система первого приближения неустойчива, следовательно, стабилизация гироскопическими силами невозможна. Теорема доказана.

Прежде чем перейти к исследованию влияния гироскопических и диссипативных сил на положение равновесия потенциальной системы вида

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_k} + D_k + \Gamma_k,$$

умножим каждое уравнение на $\dot{q}_k$ и сложим полученные произведения. После некоторых преобразований (подробности можно узнать в любом курсе теоретической механики см., например [7]), получаем равенство

$$\frac{d}{dt}(T + \Pi) = N, \;\; N = \sum D_k \dot{q}_k,$$

где N — мощность сил сопротивления. Если силы сопротивления однородны относительно скоростей, то по известной теореме Эйлера об однородных функциях будем иметь равенство

$$\frac{d}{dt}(T + \Pi) = -(m+1)R, \;\; R = \sum D_k \dot{q}_k$$

(m — степень однородности). Наконец, для линейных сил сопротивлений $m = 1$ и правая часть в последнем равенстве будет равна $-2R$, R определяется следующим образом: $D(\dot{q}) = -grad(R)$, R — функция рассеяния

Релея. При этом $D_k = -\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_k}$ [16]. Учитывая это, получаем мощность силы сопротивления: $N(\dot{q}) = D * \dot{q} = -\sum\limits_{k=1}^{s} \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k$.

Перейдем теперь ко второй теореме Томсона-Тета-Четаева.

Теорема 23. *Если изолированное положение равновесия системы устойчиво при одних потенциальных силах, то при добавлении произвольных гироскопических и диссипативных сил устойчивость равновесия сохранится.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В самом деле, как следует из предыдущих рассуждений, мощность N диссипативных сил не положительна, следовательно,

$$\frac{d}{dt}(T + \Pi) \leq 0 \tag{2.89}$$

Учтем, что в положении устойчивого равновесия потенциальная энергия Π имеет минимум [16] В самом деле, в положении равновесия ($q_i = 0$) $\Pi = 0$, следовательно, в достаточно малой окрестности положения равновесия Π является определенно положительной функцией величин q_i, тогда полная энергия консервативной системы $V = T + \Pi$ является определенно положительной функцией величин q_i, $\dot{q}_i$. Производная $\frac{dV}{dt} = 0$ (в силу существования интеграла энергии для консервативных систем [16]), следовательно, положение равновесия устойчиво. Но тогда при добавлении диссипативных сил (мощность которых не положительна) и гироскопических сил, ввиду (2.90), полная производная от энергии этой системы не положительна, т.е. система устойчива. Это доказывает теорему.

Рассмотрим третью теорему Томсона-Тета-Четаева.

Теорема 24. *Если изолированное положение равновесия системы устойчиво, то оно становится асимптотически устойчивым при добавлении произвольных гироскопических сил и сил сопротивления с полной диссипацией.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим вновь функцию $V = T + \Pi$. Ее полная производная (с учетом гироскопических и диссипативных сил) $\frac{dV}{dt} = N(q, \dot{q})$. На многообразии $K : q_i \neq 0$, $\dot{q}_i = 0$ производная $\frac{dV}{dt} = 0$, т.к. по условию теоремы диссипация полная [16]. Покажем, что множество K не содержит целых траекторий. В самом деле, при $\dot{q}_i = 0$ кинетическая энергия T, силы сопротивления и гироскопические силы обращаются в ноль, т.е. при $q_i \neq 0$, $\dot{q}_i = 0$ имеем равенство

$$\left(\frac{\partial \Pi}{\partial q_j}\right)_{q \neq 0} = 0, \quad j = 1, 2, ...n.$$

Но это невозможно, т.к. положение равновесия изолированное. Ввиду теоремы Барбашина-Красовского получаем асимптотическую устойчивость системы.

Четвертая теорема Томсона-Тета-Четаева.

Теорема 25. *Если в окрестности изолированного неустойчивого положения равновесия консервативной системы потенциальная энергия может принимать отрицательные значения, то при добавлении сил сопротивления с полной диссипацией и произвольных гироскопических сил равновесие системы остается неустойчивым.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В самом деле, учитывая (2.90) и свойства множества K имеем равенства:

$$V(q,\dot{q}) = 0: \;\; q,\dot{q} \in K, \;\; \dot{V} > 0: \;\; q,\dot{q} \ni K.$$

По условию теоремы в окрестности нуля существуют точки, в которых $\Pi < 0$. В этих точках ($\dot{q} = 0$) $V > 0$. Кроме того, многообразие K не содержит целых траекторий. Следовательно, по теореме 8 полученная система неустойчива. Отсюда следует невозможность стабилизации этой системы гироскопическими и диссипативными силами.

Рассмотрим пример на применение теорем Томсона-Тета-Четаева Дифференциальные уравнения движения волчка имеют вид [16]:

$$J_x\ddot{\alpha} + J_z n\dot{\beta} - Pl\alpha = 0, \tag{2.90}$$

$$J_x\ddot{\beta} - J_z n\dot{\alpha} - Pl\beta = 0. \tag{2.91}$$

Здесь I_x, I_z — соответственно, аксиальный и экваториальный моменты инерции волчка; P — сила тяжести волчка, l — расстояние от центра тяжести волчка до точки опоры, n — начальная угловая скорость относительно оси симметрии. Проекции угловой скорости собственного вращения ω на оси x, y, z определяются через углы α (угол прецессии) и β (угол нутации) следующим образом $\omega_x = \dot{\alpha}$, $\omega_y = \dot{\beta}\cos\alpha$, $\omega_z = \dot{\varphi} - \dot{\beta}\sin\alpha$, где $\dot{\varphi}$ — угловая скорость относительно оси симметрии волчка, φ — угол поворота вокруг оси симметрии. Данные углы $\{\varphi, \alpha, \beta\}$ — углы Эйлера ($\dot{\varphi}^0 = n$). Более подробно см. [7], [16]. Таким образом, задача вращения волчка относительно оси симметрии сведена к двум дифференциальным уравнениям относительно углов Эйлера α и β.

Уравнения (2.90),(2.91) можно рассматривать как результат наложения на неустойчивую потенциальную систему

$$J_x\ddot{\alpha} - Pl\alpha = 0,$$

$$J_x\ddot{\beta} - Pl\beta = 0$$

(поскольку ее характеристическое уравнение

$$\Delta = \det\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ \frac{Pl}{I_x} & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & \frac{Pl}{I_x} & -\lambda \end{pmatrix} = -\left(\frac{Pl}{I_x} - \lambda^2\right)^2 = 0$$

содержит неустойчивый корень $\lambda = \sqrt{\frac{Pl}{I_x}} > 0$) гироскопических сил $I_z n\dot{\beta}$ и $-I_z n\dot{\alpha}$ соответственно.

Обозначив $_1 = -\frac{Pl}{J_x}$, $g = \frac{I_z n}{J_x}$, получаем характеристическое уравнение для стабилизированной системы

$$\Delta = \det\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ -c_1 & -\lambda & 0 & -g \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & g & -c_1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^4 + (2c_1 + g^2)\lambda^2 + c_1^2 = 0$$

Условия гироскопической стабилизации имеют вид

$$\frac{I_z n}{I_x} > 2\sqrt{\frac{Pl}{I_x}}$$

Рассмотрим теперь задачу об оптимальной стабилизации консервативной системы. Как доказано ранее, положение равновесия консервативной механической системы не может быть асимптотически устойчивым по Ляпунову. Поэтому возникает задача по стабилизации положения равновесия механической системы за счет подходящего выбора управляющей силы $u(q, \dot{q})$. Консервативную систему будем называть стабилизируемой, если задача о стабилизации ее положения равновесия воздействием u имеет решение. При этом стабилизирующее управление $u(q, \dot{q})$ мы должны отыскивать, исходя из общей теории стабилизации, изложенной ранее. Однако оказывается, что задача о стабилизации механических систем может быть решена достаточно просто, если воспользоваться рядом механических свойств рассматриваемой системы. Эти свойства позволяют не только указать простые приемы вычисления стабилизирующей силы $u(q, \dot{q})$, но и выяснить также физическую природу этих сил.

Рассмотрим случай, когда система первого приближения является вполне управляемой, т.е. когда для управляемой системы (получаемой из системы (2.88)

$$\ddot{z} + C_0 z + Bu = 0 \tag{2.92}$$

имеют место условия полной управляемости. В этом случае система (2.92) стабилизируема силой u вида

$$u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i q_i + \sum_{i=1}^{n} \beta_i \dot{q}_i. \tag{2.93}$$

(это было доказано нами ранее). Если стабилизирующая сила u определяется равенством (2.93)(1.168), то будем говорить, что система (1.167) стабилизируема силой общей природы.

В частном случае, когда положение равновесия $q_1 = \cdots = q_n = 0$ устойчиво, т.е. когда все числа $c_i > 0$, задача о стабилизации легко решается, если исходить из физических соображений. Действительно, мы уже знаем, что для упрочения положения равновесия до асимптотической устойчивости на систему надо наложить диссипативные силы. Оказывается, что стабилизирующие диссипативные силы порождаются при этом функцией Релея следующего вида

$$R = \frac{1}{2}(\sum_{i=1}^{n} b_i x_{2i})^2 \tag{2.94}$$

и определяются равенствами

$$b_i u = -\partial R/\partial x_{2i}\,,\ (i = 1, \cdots, n),$$

из которых вытекает, что

$$u = -\sum_{i=1}^{n} b_i x_{2i}. \tag{2.95}$$

Чтобы установить справедливость этого утверждения, мы не можем здесь сослаться на третью. теорему Томсона—Тета—Четаева, поскольку в нашем случае функция Релея (2.94) является, вообще говоря, знакопостоянной квадратичной формой переменных x_{2i}. Возьмем в качестве функции Ляпунова V определенно положительную квадратичную форму

$$V = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(c_i x_{2i-1}^2 + x_{2i}^2).$$

Ее полная производная по времени, в силу уравнений (2.92), удовлетворяет соотношению

$$\frac{dV}{dt} = -2R = -(\sum_{i=1}^{n} b_i x_{2i})^2,$$

т.е. является функцией знакопостоянной отрицательной.

Покажем, что плоскость

$$\sum_{i=1}^{n} c_i b_i x_{2i} = 0$$

не содержит целых движений стабилизированной системы . Предположим от противного, что у стабилизированной системы существует нетривиальное решение $x_i(t)$ уравнений (2.92),(2.93) удовлетворяющее при всех $t \geq 0$ условию

$$\sum_{i=1}^{n} b_i x_{2i}(t) \equiv 0\,.$$

Дифференцируя это тождество по t два раза, получаем

$$\sum_{i=1}^{n} b_i \frac{dx_{2i}}{dt} \equiv -\sum_{i=1}^{n} c_i b_i x_{2i-1}(t) \equiv 0\,,$$

$$\sum_{i=1}^{n} b_i \frac{d^2x_{2i}}{dt^2} = -\sum_{i=1}^{n} c_i b_i \frac{dx_{2i-1}(t)}{dt} \equiv$$

$$\equiv -\sum_{i=1}^{n} c_i b_i x_{2i}(t) \equiv 0\,.$$

Аналогично поступаем и с последним тождеством. Таким образом, можно составить n следующих тождеств

$$\sum_{i=1}^{n} b_i x_{2i}(t) \equiv 0\,,$$

$$\sum_{i=1}^{n} c_i b_i x_{2i}(t) \equiv 0\,,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\sum_{i=1}^{n} c_i^{n-1} b_i x_{2i}(t) \equiv 0\,.$$

Полученные соотношения рассмотрим как систему n линейных однородных уравнений относительно n неизвестных x_{2i} . Предположение о существовании нетривиального решения означает, что определитель

$$\Delta = \det \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ c_1 b_1 & c_2 b_2 & \dots & c_n b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (c_1)^{n-1} b_1 & (c_2)^{n-1} b_2 & \dots & (c_n)^{n-1} b_n \end{pmatrix} = b_1 b_2 \dots b_n \prod_{1 \leq j < i \leq n} (c_i - c_j) = 0,$$

что невозможно, т.к. $b_j \neq 0$ $j = 1, 2, ...n$ и $c_i \neq c_j : i \neq j$ (ввиду того, что координаты q_i циклические). Следовательно, не существует нетривиального решения $x_{2i} \neq o$. Таким образом, стабилизированная система устойчива асимптотически.

7. Оптимальное демпфирование переходных процессов

В данном разделе нас будет интересовать вопрос о направлениях наибольшей и наименьшей скорости роста функций.

Рассмотрим вновь нелинейную неавтономную управляемую систему, аналогичную системе (2.1):

$$\frac{dx_s}{dt} = f_s(x_1, ..., x_n, u_1, ..., u_r, t), \;\; s = 1, ..., n.$$

Однако предположим теперь, что множество допустимых управлений G является произвольным подмножеством совокупности C_0 всех кусочно-непрерывных вектор-функций U с конечным числом точек разрыва. Зададим некоторую функцию $V(x_1, ..., x_n, t)$, принимающую вещественные значения и непрерывно дифференцируемую по всем своим аргументам. Считаем, что эта функция задана при $t \in (-\infty, +\infty)$, $x_s \in (-\infty, +\infty)$, $s = 1, 2, ..., n$.

Возьмем некоторую X_1 и момент времени t_1. Тогда каждому управлению $U \in G$ отвечает движение

$$X = X(t, U, X_1, t_1), \tag{2.96}$$

проходящее через точку X_1 при $t = t_1$. При этом векторная функция (2.96) является решением системы уравнений

$$\frac{dx_s}{dt} = f_s(x_1, ..., x_n, u_1, ..., u_r, t), \;\; s = 1, ..., n \tag{2.97}$$

при $u_i = u_i(t), i = 1, ..., r$. Поставим следующий вопрос: по какой траектории (2.96) системы (2.97) следует двигаться из точки (X_1, t_1), чтобы скорость изменения функции V была наибольшей или соответственно наименьшей? Иначе говоря, какому управлению $U \in G$ соответствует движение (2.96), перемещаясь вдоль которого будем иметь наибольшую или соответственно наименьшую скорость изменения функции V. Такое управление может быть определено следующим образом. Вычислим значение функции V на движении (2.96) и найдем полную производную по t от полученной функции. Тогда будем иметь

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\delta V}{\delta t} + \sum_{s=1}^{n} \frac{\delta V}{\delta t} f_s. \tag{2.98}$$

Положим в (2.98) $t = t_1$ и найдем векторы $U_{\min}(X_1, t_1)$ и $U_{\max}(X_1, t_1)$, при которых правая часть (2.98) имеет соответственно наибольшее и наименьшее значения. Предположим, что правая часть (2.98) неположительна при $U \in G$. Тогда оказывается, что наибольшая скорость убывания функции V имеет место вдоль движения, проекция скорости которого на направление градиента V является наименьшей. Соответственно скорость убывания функции наименьшая вдоль того движения, проекция скорости которого на направление градиента функции V будет наибольшей. Предположим теперь, что правая часть (2.98) неотрицательна при $U \in G$. Тогда функция V имеет наибольшую скорость возрастания вдоль того движения, проекция скорости которого на направление градиента функции V является наибольшей. Соответственно этому скорость возрастания функции V будет наименьшей вдоль того движения, проекция скорости которого на направление градиента функции V является наименьшей. Предположим, наконец, что правая часть (2.98) отрицательна при $U = U_{\min}$ и положительна при $U = U_{\max}$. Тогда направление наибольшей скорости возрастания функции V совпадает с направлением скорости того движения, проекция скорости которого на направление градиента V имеет наибольшую величину. И, наконец, направление наибольшей скорости убывания функции V совпадает с направлением движения, проекция скорости которого на направление $\mathrm{grad}\, V$ минимальна. Остановимся на том случае, когда функция V убывает вдоль движения, соответствующего управлению $U_{\min}(X_1, t_1)$. Положим $U_0(X_1, t) = U_{\min}(X_1, t)$ и подставим управление U_0 в систему (2.97). Тогда получим систему

$$\frac{dx_s}{dt} = f_s(x_1, ..., x_n, u_1^{(0)}, ..., u_r^{(0)}, t), \ s = 1, ..., n. \tag{2.99}$$

Предположим, что система (2.99) имеет при каждом X_1 и t_1 решение:

$$X^{(0)} = X(t, \ X_1, \ t_1), \ X = X_1 : \ \ t = t_1 \tag{2.100}$$

непрерывное и кусочно-непрерывно дифференцируемое. Вычислим функцию

$$U_0(t) = U(X^{(0)}(t, \ X_1, \ t_1)).$$

Предположим, что $U_0(t) \in G$. Тогда оказывается, что скорость убывания функции V в каждой точке интегральной кривой (2.100) является наибольшей. Действительно, пусть τ — некоторый момент и $\bar{X}$ — точка кривой

(2.100), соответствующая этому моменту. Формула (2.98) дает выражение скорости убывания функции V в этой точке вдоль любого движения, проходящего через нее. Наименьшее возможное значение правая часть (2.98) принимает при

$$U = U_{\min} = U_0(\bar{t}).$$

Значит, скорость убывания функции V будет наибольшей вдоль движения (2.100). Предположим теперь, что функция V определяет в каком-либо смысле расстояние от переходного процесса, возникающего в системе (2.97), до некоторого установившегося состояния или до некоторого многообразия, с которым сравнивается поведение интегральных кривых системы (2.97). Будем считать, что роль системы управления сводится к тому, чтобы это расстояние уменьшить. Тогда естественным становится понятие об оптимальном управлении по отношению к демпфированию функции V.

Определение 10. *Если функция $U_0\ (X,\ t)$ доставляет наименьшее возможное значение функции*

$$\sum_{s=1}^{n} \frac{\delta V}{\delta t} f_s$$

среди всех управлений из множества G и система (2.99) определяет действительное движение (2.100) так, что управление

$$U_0(t) = U\ (X^{(0)}\ (t,\ X_1,\ t_1),\ t)$$

является допустимым, то управление $U_0(t)$ и движение $X(0)(t,\ X_1,\ t_1)$ называются оптимальными по отношению к демпфированию функции V.

. **Пример 1.** Пусть в n-мерном пространстве $(x_1,\ ...,\ x_n)$ задана движущаяся точка с постоянной по величине скоростью

$$\frac{dx_s}{dt} = u_s,\ s = 1,\ ..., n,\ \sum_{s=1}^{n} u_s^2 = 1. \tag{2.101}$$

Требуется управление $U = (u_1,\ ..., u_n)$ выбрать таким образом, чтобы движущаяся точка из заданной точки $(x_1,\ ...,\ x_n)$ перемещалась в начало координат. Естественно, в качестве функции V взять функцию $V = \sum\limits_{s=1}^{n} x_s^2$.

Найдем управление, оптимальное по отношению к демпфированию функции V. Функция $\sum\limits_{s=1}^{n} 2x_s u_s$ имеет наименьшее значение при

$$u_s = -\frac{x_s}{\sqrt{\sum\limits_{j=1}^{n} x_j^2}}. \tag{2.102}$$

Покажем, что при управлении (2.102) движущаяся точка из любой заданной точки $(\bar{x}_1,\ \ldots,\ \bar{x}_n)$ действительно попадает в начало координат. Система (2.101) при управлении (2.102) имеет вид

$$\frac{dx_s}{dt} = -\frac{x_s}{\sqrt{\sum\limits_{j=1}^{n} x_j^2}}. \tag{2.103}$$

Умножая s-е уравнение системы (2.103) на x_s и складывая, получим

$$\tfrac{1}{2}\tfrac{d}{dt} r^2 = -r,$$

где $r = \sqrt{\sum\limits_{j=1}^{n} x_j^2}$.

Интегрируя последнее уравнение, найдем $r = -t + \bar{r}$. Следовательно, движущаяся точка попадает в начало координат в момент

$$\bar{t} = \bar{r} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \bar{x}_s^2}.$$

Легко показать, что $\bar{t}$ является наименьшим возможным временем, за которое движущаяся точка может из точки $\bar{X}$ попасть в начало координат. Таким образом, в данном случае управление $U^{(0)}$, оптимальное по отношению к демпфированию функции V, является одновременно оптимальным по быстродействию.

Глава 3

Устойчивость и стабилизация разностных систем и систем с запаздывающим аргументом

1. Устойчивость и стабилизация разностных систем

Подобную задачу об оптимальной стабилизации можно рассмотреть и для разностных управляемых систем с управляющим воздействием v вида

$$z_{k+1} = Tz_k + Bv_k, \ \ k = 0, 1, 2, \dots . \tag{3.1}$$

Здесь T — квадратная матрица размерности $n \times n$, $z(o) = z^0$. Пусть управляющее воздействие отсутствует ($v_k \equiv 0$). Очевидно, что решение соответствующей однородной системы имеет вид

$$z_k = T^k z^0.$$

Как теперь следует, что для получения информации о поведении z_k нужно изучить поведение степеней матрицы T. Известно [21], что для каждого собственного значения ρ матрицы T существует собственный вектор γ_ρ:

$$T\gamma_\rho = \rho\gamma_\rho.$$

Отсюда следует, что для асимптотической устойчивости однородной системы необходимо, чтобы

$$|\rho| < 1 : \ \ |T - \rho E| = 0. \tag{3.2}$$

Как следует из [18], это условие является и достаточным. При невыполнении неравенства (3.3) возникает задача стабилизации системы (3.1) при минимизации функционала:

$$Q = \sum_{i=0}^{\infty} z_i^\top G z_i + v_i^\top v_i.$$

Здесь G — симметричная, положительно определенная матрица размерности $[m \times m]$. Известно [5], что при этом искомые управления имеют вид

$$v_j = \left(E + B^\top PB\right)^{-1} BPAz_j,$$

где P — постоянная симметричная, положительно определенная матрица размерности $[m \times m]$, удовлетворяющая матричному уравнению

$$T^\top PT + G - B^\top PB(E + B^\top PB)^{-1}B^\top PB = 0 \tag{3.3}$$

(данное уравнение разрешимо при полной управляемости системы (3.1)). Собственные значения ρ_s полученной в результате стабилизации матрицы $A + B\left(E + B^\top PB\right)^{-1} BPA$ меньше единицы по модулю, т.е. стабилизированная таким образом система экспоненциально устойчива [21].

Установим некоторые свойства линейных однородных систем. Рассмотрим функцию Ляпунова $W = z^\top Rz$. Введем обозначение $W_m = z_k^\top Rz_k$. Получим соотношение $\Delta W = W_{k+1} - W_k = z_k^\top(T^\top RT - R)z_k$. Если мы хотим, чтобы $\Delta W = W_{k+1} - W_k$ равнялось заданной квадратичной форме $z_k^\top Hz_k$, то получим матричное уравнение

$$T^\top RT - R = H. \tag{3.4}$$

Данное уравнение, в частности, разрешимо при условии, что $\rho_i\rho_j \neq 1$ при любых i, j. Известно, что в случае, когда все собственные значения ρ матрицы T меньше единицы по модулю, то для любой симметричной, определенно отрицательной матрицы H найдется симметричная, определенно положительная матрица R — решение уравнения (3.5). Таким образом, для исследования вопроса об устойчивости решения разностных систем можно применять функции Ляпунова и исследовать знакоопределенность их первой разности в силу решений разностных систем.

Достаточные условия устойчивости более сложных систем можно получать, используя функции Ляпунова весьма сложных конструкций. Приведем пример:

$$z_{k+1} = \frac{1}{z_k^2}. \tag{3.5}$$

Рассмотрим поведение z_k на множестве положительных чисел. Очевидно, даже если начальные данные z^0 являются отрицательными, на следующем шаге решения z_k все равно будут уже положительными и такими остаются. Рассмотрим функцию Ляпунова $V(z) = \frac{z}{1+z^2}$. Она определенно положительна при $z > 0$, а $\Delta V(z) = \frac{z^2}{1+z^4} - \frac{z}{1+z^2} = \frac{-z(1+z+z^2)(z-1)^2}{1+z^2)(1+z^4)} \leq 0$ при $z > 0$. Таким образом, $\Delta V(z) \leq 0$, отсюда следует, что решение системы (3.6) устойчиво. Функции Ляпунова, например, для нестационарных систем

$$z_{k+1} = T_k z_k, \;\; k = 0, 1, 2, ... \tag{3.6}$$

имеют вид

$$V_k(z) = \sum_{l=k}^{\infty} z^\top (Z_{l,k})^\top W_l Z_{l,k} z. \tag{3.7}$$

Здесь $Z_{l,k} = T_{l-1}T_{l-2}...T_k$, W_l — матрицы квадратичных форм $W_l(z)$. Отсюда следует, что в случае, когда $T_{k+N} = T_k$, матрица $T^N = T_i T_{i+1}...T_{i+N-1}$ имеет собственные значения ρ^N меньше единицы по модулю, существует функция Ляпунова, определенно положительная, первая разность которой будет определенно отрицательной, т.е. такая нестационарная разностная система будет экспоненциально устойчива.

Все сказанное выше позволяет сформулировать следующие достаточные условия устойчивости и асимптотической устойчивости для разностных систем.

Теорема 26. *Если существует последовательность определенно положительных функций $V_k(z)$: $V_k(z) \geq V_{k+1}(z)$, то решение соответствующей разностной системы устойчиво.*

Теорема 27. *Если существует последовательность определенно положительных функций $V_k(z)$: $V_{k+1}(z) - V_k(z) \leq -a\|z\|$, $a = const$ $a > 0$, то решение соответствующей разностной системы асимптотически устойчиво.*

Доказательства этих теорем приведено в [18].

В заключение отметим, что собственные значения ρ матрицы T и собственные значения λ матрицы $A = (T+E)(T-E)^{-1}$ связаны соотношением

$$\lambda = \frac{\rho + 1}{\rho - 1}.$$

Это позволяет использовать критерии Гурвица и Михайлова для того, чтобы установить, выполняется ли для собственных значений ρ неравенство $|\rho| < 1$.

Рассмотрим теперь свойства линейных неоднородных разностных систем. Данные системы имеют вид

$$x_{n+1} = A_n + f_{n+1}. \tag{3.8}$$

Здесь матрицы A_n являются функциями от n. Установим формулу вариации постоянных, дающую полезное представление решений неоднородных систем 3.9. Если x_n — некоторое решение системы (3.9), то справедливы соотношения

$$x_n = A_{n-1}x_{n-1} + f_n = A_{n-1}(A_{n-2}x_{n-2} + f_{n-1}) + A_{n-1}f_n + f_{n+1} = ...$$

$$... = X_{n,0}x_0 + \sum_{k=1}^{n} X_{n,k}f_k.$$

Таким образом, окончательно получаем формулу вариации постоянных:

$$x_n = A_{n-1}x_{n-1} + f_n = X_{n,0}x_0 + \sum_{k=1}^{n} X_{n,k}f_k. \tag{3.9}$$

Докажем теперь с помощью этой формулы теорему об устойчивости по первому приближению. Рассмотрим нелинейную систему

$$x_{n+1} = A_n x_n + \hat{f}_n(x_n): \ \ \hat{f}_n(0) = 0. \tag{3.10}$$

Здесь $\hat{f}_n(x) \leq \delta\|x\|$, δ — весьма малое положительное число. Полагаем, что соответствующая линейная однородная система

$$x^0_{n+1} = A_n x^0_n$$

экспоненциально устойчива, т.е. для ее решения справедлива оценка

$$\|x^0_n\| \leq Lq^n\|x_0\|, \ \ L = \text{const.} \ \ L > 1, \ \ q = \text{const}, \ \ 0 < q < 1. \tag{3.11}$$

Рассмотрим равенство (3.11). Принимая нелинейный член в (3.11) за неоднородность, используя формулу вариации постоянных, получаем соотношение

$$x_n = x^0_n + \sum_{k=1}^{n} X_{n,k}f_k(x_k).$$

Отсюда, учитывая оценку (3.12), получаем неравенство

$$\|x_n\| \leq Lq^n\|x_0\| + L\sum_{k=1}^{n} q^{n-k}\delta\|x_{k-1}\|.$$

Обозначив $g_k = q^{-k}\|x_k\|$, из последнего неравенства имеем соотношение

$$g_n \leq Lq^n g_0 + \frac{L\delta}{q}\sum_{k=1}^{n} g_{k-1}.$$

Положим,

$$z_n = Lq^n g_0 + \frac{L\delta}{q}\sum_{k=1}^{n} g_{k-1}, \tag{3.12}$$

тогда получаем серию оценок

$$z_{n+1} - z_n = \frac{L\delta}{q} g_n \leq \frac{L\delta}{q} z_n,$$

следовательно,

$$z_{n+1} \leq \left(1 + \frac{L\delta}{q}\right) z_n,$$

откуда имеем

$$z_n \leq \left(1 + \frac{L\delta}{q}\right)^{n-1} z_1, \;\; z_1 = L\left(1 + \frac{\delta}{q}\right) g_0, \tag{3.13}$$

полагая

$$L_1 = \left(1 + \frac{L\delta}{q}\right)^{-1}\left(1 + \frac{\delta}{q}\right), \;\; q_1 = q + L\delta,$$

учитывая (3,13), а также тот факт, что при достаточно малом $\delta > 0$ положительная постоянная $q_1 < 1$, из (2.13) получаем экспоненциальную оценку решения "возмущенной"системы

$$\|x_n\| \leq L_1 q_1^n \|x_0\|, \;\; L_1 = \mathrm{const}, \;\; L \geq 1, \;\; q_1 = \mathrm{const}, \;\; 0 < q_1 < 1: \;\; \delta < \frac{1-q}{L}.$$

Теорема доказана.

Следствие 1. Пусть в соотношении (3.9) вектор-функция f_n равномерно ограничена при любом n, т.е.

$$\|f_n\| < \hat{K}, \;\; \hat{K} = \mathrm{const}, \;\; \hat{K} > 0. \tag{3.14}$$

Соответствующая однородная система полагается экспоненциально устойчивой, т.е. для ее решения x_n^0 справедлива оценка (3.12). Тогда решение неоднородной системы (3.9) равномерно ограничено.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим равенство (3.9). Учитывая оценки (3.12) и (3.15), получаем из него неравенства:

$$\|x_n\| \leq Lq^n\|x_0\| + L\sum_{k=1}^{n} q^{n-k}\|f_{k-1}\| < Lq^n\|x_0\| + L\hat{K}\sum_{k=1}^{n} q^{n-k}.$$

Ввиду того, что $\sum\limits_{j=1}^{\infty} q^j \leq \frac{1}{1-q}$, получаем из последнего соотношения оценку

$$\|x_n\| \leq Lq^n\|x_0\| + \frac{L\hat{K}}{q}, \tag{3.15}$$

откуда и следует ограниченность решения системы (3.9).

Следствие 2. Пусть теперь в соотношении (3.9) вектор-функция f_n не только является равномерно ограниченной, но и справедливо предельное равенство

$$\lim_{n\to\infty} f_n = 0 \tag{3.16}$$

(при этом полагаем решение однородной системы экспоненциально устойчивым). Тогда решение неоднородной системы (3.9) асимптотически устойчиво.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Ввиду следствия 1 решение неоднородной системы (3.9) ограничено. Представим теперь решение данной системы x_{n+k} в следующем виде:

$$x_{n+k} = X_{n,0}x_0 + \sum_{i=1}^{n} X_{n+k,i}f_i + \sum_{j=n+1}^{n+k} X_{n+k,j}f_j.$$

Отсюда, учитывая оценки (3.9),(3.12) и (3.17), получаем цепь неравенств

$$\|x_{n+k}\| \le Lq^{n+k}\|x_0\| + L\sum_{i=1}^{n} q^{n+k-i}\|f_i\| + L\sum_{j=n+1}^{n+k} q^{n+k-j}\|f_j\| \le$$

$$\le Lq^{n+k}\|x_0\| + Lq^n\frac{\hat{K}}{1-q} + L\frac{\varepsilon_n}{1-q}. \tag{3.17}$$

Здесь $\varepsilon_n = \sup\limits_{n\le j<\infty}\|f_j\|$. Очевидно, $\limsup\limits_{n\to\infty}\varepsilon_n = 0$. Тогда из (3.17) получаем асимптотическую устойчивость решения системы (3.9). Следствие 2 доказано.

Докажем еще одну подобную теорему. Пусть матрица C имеет все собственные значения $|\lambda| < 1$. Рассмотрим следующую систему:

$$x_{n+1} = A_n x_n : \ \sum_{k=0}^{\infty}\|A_k - C\| < \infty. \tag{3.18}$$

Теорема 28. *Система (3.19) экспоненциально устойчива, при этом для ее решения справедлива оценка*

$$\|x_n\| \le \hat{L}\hat{q}^n\|x_0\| : \ \ \hat{L} = const, \hat{L} > 1 \ \ \hat{q} = \max_j\{|\lambda_j| + \varepsilon\}, \tag{3.19}$$

(ε — достаточно малое положительное число).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Очевидно, для невозмущенной системы

$$x^0_{n+1} = Cx_n$$

имеет место экспоненциальная оценка

$$\|x^0_n\| \le L\hat{q}^n\|x_0\|, \;\; L = \mathrm{const}, \;\; L \ge 1.$$

Записывая решение системы (3.19) в виде $x_{n+1} = Cx_n + (A_n - C)x_n$, считая неоднородностью члены вида $(A_n - C)x_n$, используя формулу вариации постоянных, методами, аналогично приведенным ранее в предыдущей теореме, получаем неравенство

$$\|x_n\| \le L\hat{q}^n\|x_0\| + L\sum_{k=1}^{n}\hat{q}^{n-k}\|A_k - C\|\|x_{k-1}\|.$$

Полагая $\hat{g}_n = \frac{\|x_n\|}{\hat{q}^n}$, получаем оценку

$$\hat{g}_n \le L\hat{g}_0 + \frac{L}{\hat{q}}\sum_{k=1}^{n}\|A_k - C\|\hat{g}_{k-1}.$$

Следовательно,

$$\hat{g}_n \le L\hat{g}_0\prod_{k-0}^{n-1}\left(1 + \frac{L}{\hat{q}}\|A_k - C\|\right).$$

Отсюда

$$\|x_n\| \le L\hat{q}^n\prod_{k-0}^{n-1}\left(1 + \frac{L}{\hat{q}}\|A_k - C\|\right)\|x_0\|. \tag{3.20}$$

Но произведение $\prod\limits_{k-0}^{\infty}\left(1 + \frac{L}{\hat{q}}\|A_k - C\|\|x_{k-1}\|\right) < \infty$ вследствие сходимости ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\|A_k - C\|$. В результате из (3.21) получаем оценку (3.20).

Следствие. Если невозмущенная система устойчива, но не асимптотически, т. е. $\|C^k\| < M$, $M = \mathrm{const}$, $M > 1$, $k = 1, 2, ...$ Тогда возмущенная система (3.19) устойчива.

В самом деле, для возмущенной системы имеем, используя формулу вариации постоянных, следующее соотношение:

$$x_n = C^n x^0 + \sum_{k=0}^{n} C^{n-k}(A_k - C)x_{k-1}. \tag{3.21}$$

Отсюда следует неравенство

$$\|x_n\| \leq M\|x_0\| + M\sum_{k=1}^{n} \|(A_k - C)\|\|x_{k-1}\|.$$

Наконец, получаем оценку

$$\|x_n\| \leq M\|x_0\| + M\prod_{k=1}^{\infty} (1 + M\|(A_k - C)\|),$$

откуда и вытекает устойчивость решения системы (3.19).

Приведем конкретный пример использования теории разностных уравнений для исследования поведения решений дифференциальных уравнений.

Рассмотрим дифференциальное уравнение первого порядка

$$y'(x) = f(x, y), \;\; y(x_0) = y_0.$$

Имеем задачу Коши. Будем предполагать, что функция $f(x, y)$ определена по первому аргументу на отрезке $[x_0, x_0 + M]$, по второму аргументу — на всей числовой прямой; в области определения функция $f(x, y)$ непрерывна, при этом существует константа $L > 0$: $f(x, y_1) - f(x, y_2) \leq L|y_1 - y_2|$ (тогда решение данного дифференциального уравнения существует и единственно в окрестности точки x_0). Будем искать приближенное решение данного дифференциального уравнения в дискретной схеме, для чего разобьем отрезок $[x_0, x_0 + M]$ на N равных частей. Приближенные значения в точках $x_0 + ih)$ будем обозначать как y_i: $h = \frac{M}{N}$ в отличие от точных $y(x_0 + ih)$. Далее полагаем, что правая часть уравнения достаточное число раз дифференцируема.

Разложим $y(x_1)$ по формуле Тейлора в окрестности точки x_0:

$$y * x_1 = y(x_0) + y'(x_0)h + y"(x_0)\frac{h^2}{2} + \dots .$$

Взяв в разложении несколько слагаемых и отбросив остальные, получаем тот или иной метод приближенного решения, в частности, простейший метод (одношаговый) выглядит так:

$$y_1 = y_0 + f(x_0, y_0).$$

Далее аналогично:

$$y_{n+1} = y_n + f(x_n, y_n).$$

Получили разностное уравнение (этот метод называется методом Эйлера). Сходимость этого метода обосновывается в [20]. Известно, что в случае экспоненциальной устойчивости разностной (приближенной) системы экспоненциально устойчиво и решение точной (исходной) системы. Более того, в случае исследования нелинейной консервативной системы при существовании интеграла энергии из устойчивости соответствующей разностной системы следует и устойчивость исходной механической системы.

Приведем решение еще одной задачи с помощью разностных систем. Одним из наиболее простых методов приближенного решения алгебраического уравнения

$$P_n(x) := a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n = 0, \ \ a_0a_n \neq 0$$

(коэффициенты a_k считаем вещественными) является метод Бернулли, называемый также методом моментов. Он позволяет найти доминирующий (т.е. наибольший по модулю) корень, а также несколько корней, ближайших к нему по модулю.

Сделаем два замечания об отыскании остальных корней.

1. Тривиальный случай наличия корня $x = 0$ данного уравнения исключен условием $a_n \neq 0$, в частности, корень с минимальным модулем отличен от нуля. Для нахождения такого корня нужно сделать замену $y = x^{-1}$ и к полученному уравнению $a_0 + a_1y + ... + a_{n-1}y^{n-1} + a_ny^n = 0$ применить метод Бернулли.

2. Если найден некоторый корень $x = a$ многочлена P_n, то можно понизить степень уравнения по теореме Безу и применить к полученному уравнению метод Бернулли.

Изложим схему метода Бернулли. Преобразуем наше уравнение к виду

$$x^n = p_1x^{n-1} + ... + p_{n-1}x + p_n, \ \ p_j = -a_j/a_0 \tag{3.22}$$

и построим числовую последовательность $\{u_k\}_{k=0}^{\infty}$ по следующей рекуррентной формуле:

$$u_{n+k} = p_1u_{n+k-1} + ... + p_{n-1}u_{k+1} + p_nu_k, \ \ k = 1, 2, 3, ... \tag{3.23}$$

(при $k = 1, 2, ...n$ $u_1 = u_2 = ... = u_{n-1} = 0$, $u_n = k$). Очевидно, уравнение (3.23) есть линейное разностное уравнение порядка n. Оказывается, что

$$\sum x_j^k = u_{n+k}, \ \ k = 1, 2, ... \tag{3.24}$$

В зависимости от типа доминирующих корней уравнения (3.23) может представиться один и только один из четырех случаев:

1) уравнение имеет один (возможно, кратный) доминирующий корень, необходимо вещественный;

2) уравнение имеет два вещественных (возможно, кратных) доминирующих корня, разных по знаку;

3) уравнение имеет пару комплексных (возможно, кратных) сопряженных доминирующих корней;

4) уравнение имеет три или более различных между собой доминирующих корня (два из них необходимо комплексно сопряженные).

В последнем случае непосредственное вычисление корней по методу Бернулли невозможно, тогда как каждый из из первых трех случаев может быть распознан по виду последовательности u_k. Ограничимся изучением первого случая, именно, пусть единственный доминирующий корень уравнения (3.23) вещественный и имеет кратность s; пусть для определенности, $x_1 = x_2 = ... = x_s$. Тогда по формуле (3.24):

$$u_{n+k} = s x_1^k \left[1 + \frac{1}{s} \sum_{j=k+1}^{n} \left(\frac{x_j}{x_1} \right)^k \right].$$

По условию, модуль любого из корней $x_{k+1}, ...x_n$ меньше модуля x_1, следовательно, при больших k $u_{n+k} \approx s x_1^k$. Приходим к предельному равенству

$$\lim_{k\to\infty} U_k = x_1, \ \ U_k = \frac{u_{n+k+1}}{u_{n+k}}.$$

Заданная точность считается достигнутой, когда, например $|U_{k+1} - U_k| < \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ — наперед заданное малое положительное число. Отметим, что в остальных трех случаях последовательность U_k расходится.

Приведем пример применения методов стабилизации разностных систем для стабилизации одной функционально-разностной системы вида

$$\hat{x}_1(t) = 2\hat{x}_1(t-1) + 3\hat{x}_1(t-2) + 4\hat{x}_2(t-2) + 2v_1(t),$$

$$\hat{x}_2(t) = -2\hat{x}_1(t-1) - 2\hat{x}_2(t-1) - \hat{x}_1(t-2) + 0.2\hat{x}_2(t-2) + v_1(t) + 2v_2(t) \quad (3.25)$$

($t \geq 0$). Перейдем от данной управляемой функционально-разностной системы к разностной управляемой системе четвертого порядка:

$$x(t+\tau) = Ax(t) + Bu(t). \quad (3.26)$$

Здесь матрицы A, B имеют следующий вид:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & 0 \\ -1 & 0.2 & -2 & -2 \end{pmatrix}, \ \ B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}. \quad (3.27)$$

Очевидно, данная система (при $u \equiv 0$) неустойчива (собственными значениями матрицы A являются величины $\{2.299; -0.666; 1.0099; -2.732\}$). Будем стабилизировать разностную систему (3.27). Поскольку ранг матрицы $\{B \;\; AB \;\; A^2B \;\; A^3B\}$ равен 4, система (2.26) вполне управляема. Ввиду того, что матрица A^{-1} существует, будем искать управляющее воздействие (по аналогии с (2.40)) следующим образом [20]:

$$u(t) = -(E_n + B^\top \hat{R} B)^{-1} B^\top \hat{R} A x(t) = A_s x(t), \tag{3.28}$$

где $\hat{R}$ — матрица размерности 4×4, удовлетворяющая уравнению [21, с. 107]

$$\hat{R}^{-1} + BB^\top = \frac{1}{\delta} A \hat{R}^{-1} A^\top, \;\; \delta = \mathrm{const}, \;\; 0 < \delta < 1. \tag{3.29}$$

Пусть, например, параметр $\delta = 0.4$. Тогда решением линейного матричного уравнения (3.30) будет симметричная матрица $\hat{R}^{-1}$, с обратной матрицей $\hat{R}$

$$\hat{R}^{-1} = \begin{pmatrix} 7.206 & -3.351 & -3.322 & 0.929 \\ -3.351 & 2.115 & 0.839 & -0.022 \\ -3.322 & 0.839 & 2.697 & -1.209 \\ 0.929 & -0.022 & -1.209 & 0.762 \end{pmatrix},$$

откуда

$$\hat{R} = \begin{pmatrix} 7.937 & 8.75 & 9.8 & 6.125 \\ 8.75 & 10.485 & 10 & 5.5 \\ 9.8 & 10 & 14.213 & 10.89 \\ 6.125 & 5.5 & 10.89 & 11.279 \end{pmatrix}.$$

Собственные значения матрицы $\hat{R}$ есть величины $\{37.178; 6.131; 0.499; 0.103\}$, т.е. симметричная матрица $\hat{R}$ является определенно положительной. Учитывая последнее равенство, вычисляем управление $u(t)$ в соответствии с формулой (3.29), где матрица A_s имеет следующие компоненты:

$$A_s = \begin{pmatrix} 1.316 & 1.816 & 1.28 & 0.464 \\ -0.959 & -0.617 & -1.603 & -1.404 \end{pmatrix}.$$

Стабилизированная (разностная) система имеет вид

$$z(t+1) = B_s z(t), \tag{3.30}$$

матрица $B_s = A + Bu$ имеет компоненты

$$B_s = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.368 & 0.368 & -0.56 & -0.927 \\ -0.398 & -0.382 & -0.073 & 0.345 \end{pmatrix},$$

ее собственные значения $\{0.358; 0.175; -0.148; -0.599\}$ меньше единицы по модулю, т.е. система (3.31) асимптотически устойчива. Полагая теперь в исходной системе (3.26) управление

$$u = A_s \begin{pmatrix} x_1(t-2) \\ x_2(t-2) \\ x_1(t-1) \\ x_2(t-1) \end{pmatrix},$$

получим следующую систему:

$$dx(t)/dt = e^t \left(Ax(t) + \sum_{j=1}^{2} B_{sj} x(t-j) \right), \quad t \geq 0. \tag{3.31}$$

Здесь B_{sj} $(j = 1, 2)$ — постоянные матрицы размерности $m \times m$, определенные следующим образом:

$$B_{s1} = \begin{pmatrix} -0.28 & -0.463 \\ -0.0365 & 0.173 \end{pmatrix}, \quad B_{s2} = \begin{pmatrix} 0.184 & 0.184 \\ -0.199 & -0.191 \end{pmatrix}.$$

При начальной вектор-функции $\phi(\eta) = \{1; 1\}^\top$, $\eta \in [-2, 0]$ произведен численный расчет решений неустойчивой (исходной) системы (при $u(t) \equiv 0$), так и стабилизированной системы (3.32).

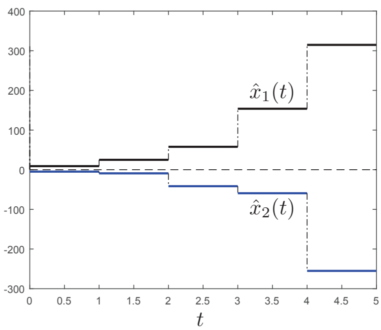

Рис. 12

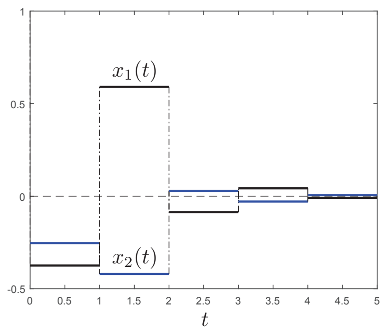

Рис. 13

Графики, полученные в результате численного интегрирования (на рис. 12 представлен график решения исходной системы, на рис. 13 представлен график стабилизированной системы (3.32)), иллюстрируют асимптотическое поведение решений данных систем.

2. Устойчивость и стабилизация систем с запаздывающим аргументом

2.1. Постановка основной начальной задачи. Классификация

Для простейшего дифференциального уравнения с отклоняющимся аргументом

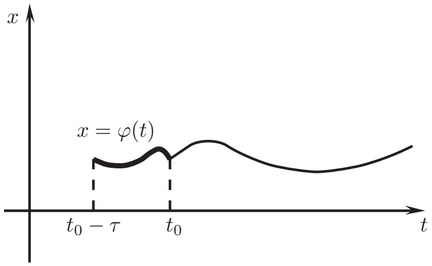

Рис. 14

$$x(t) = f(t, x(t), x(t-\tau)), \qquad (3.32)$$

где запаздывание τ пока будет считать положительной постоянной, *основная начальная задача* заключается в определении непрерывного решения $x(t)$ уравнения (3.33) при $t > t_0$, при условии, что $x(t) = \varphi(t)$ при $t_0 - \tau \le t \le t_0$, где $\varphi(t)$ — заданная непрерывная функция, называемая *начальной* (рис.14). Отрезок $t_0 - \tau \le t \le t_0$, на котором задана начальная функция, называется *начальным множеством* и обозначается E_{t_0}; точка t_0 называется *начальной точкой*. Обычно предполагается, что $x(t_0 + 0) = \varphi(t_0)$.

При некоторых ограничениях доказано существование решения этой начальной задачи [24], которое часто обозначается как $x(t, \varphi(t))$.

Если в уравнении (3.33) и в начальных условиях *x(t)*,f и $\varphi(t)$ считать вектор-функциями, то мы получим постановку основной начальной задачи для системы уравнений.

В случае переменного запаздывания $\tau = \tau(t) \ge 0$ в уравнении (3.33) также требуется найти решение этого уравнения при $t > t_0$, причем на начальном множестве E_{t_0}, состоящем из точки t_0 и из тех значений $t - \tau(t)$, которые меньше t_0 при $t \ge t_0, x(t)$ считается совпадающим с заданной начальной функцией $\varphi(t)^*$.

Например, в уравнении $\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t - \cos^2 t))$ при $t_0 = 0$ начальная функция $\varphi(t)$ должна быть задана на начальном множестве E_0, являющемся отрезком $-1 \le t \le 0$. В уравнении $\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(\frac{t}{2}))$ при $t_0 = 0$ начальное множество E_0 состоит из одной точки E_0. В том же уравнении при $t_0 = 1$ начальное множество E_1 является отрезком $\frac{1}{2} \le t \le 1$.

В прикладных задачах начальную функцию иногда находят экспериментально. Начальная функция может определяться и из другого уравнения без отклонений аргумента, которое, например в некоторых задачах автоматического регулирования, описывает процесс до момента начала действия обратной связи.

Уравнение (3.33) может иметь и l запаздываний. Еще более общее уравнение есть дифференциальное уравнение k-го порядка с l отклонениями аргумента

$$x^{(k)}(t) = f(t, x(t), \ldots, x^{(k-1)}(t), x(t-\tau_1(t)), \ldots,$$
$$x^{(k_1)}(t-\tau_1(t))), \ldots, x^{(k_l)}(t-\tau_l(t))), \tag{3.33}$$

где отклонения $\tau_i(t) \geq 0$, $\max\limits_{0\leq i\leq l} k_i = k-1$. Здесь под $x^{(k)}(t-\tau_i(t))$ понимается k-я производная от функции $x(z)$, взятая в точке $z = t - \tau_i(t)$. Уравнения, содержащие производные с запаздыванием, называются уравнениями нейтрального типа [4,24].

2.2. Метод шагов

Рассмотрим основную начальную задачу для простейшего дифференциального уравнения с запаздывающим аргументом

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t-\tau)),$$

где постоянное запаздывание $\tau > 0$,

$$x(t) = \varphi_0(t) \text{ при } t_0\ \tau \leq t \leq t_0.$$

Наиболее естественным методом решения этой задачи является так называемый метод шагов (или метод последовательного интегрирования), заключающийся в том, что решение $x(t)$ рассматриваемой задачи определяется из дифференциальных уравнений без запаздывания

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), \varphi_0(t-\tau)),$$
$$t_0 \leq t \leq t_0 + \tau,\ x(t_0) = \varphi_0(t_0),$$

т.к. при $t_0 \leq t \leq t_0 + \tau$ аргумент $t - \tau$ изменяется на начальном множестве $[t_0 - \tau, t_0]$ и, следовательно, третий аргумент $x(t-\tau)$ функции f равен начальной функции $\varphi_0(t-\tau)$. В результате мы построили решение $x = \varphi_1(t)$ исходного уравнения на отрезке $[t_0, t_0 + \tau]$. Действуя аналогично предыдущему случаю получим уравнение

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), \varphi_1(t-\tau)) \text{ при } t_0 + \tau \leq t \leq t_0 + 2\tau,$$

решение которого, удовлетворяющее начальному условию $x(t_0+\tau) = \varphi_1(t_0+$ $+\tau)$, задает решение $x = \varphi_2(t)$ исходного уравнения на отрезке $[t_0 + \tau, t_0+$

$+2\tau]$, и так далее. На отрезке $[t_0+(n-1)\tau, t_0+n\tau]$ решение $x=\varphi_n(t)$ будет определяться как решение уравнения

$$\dot{x}(t)=f(t,x(t),\varphi_{n-1}(t-\tau)) \text{ при } t_0+(n-1)\tau\le t\le t_0+n\tau.$$

где $\varphi_{n-1}(t)$— решение начальной задачи на отрезке $[t_0+(n-2)\tau, t_0+(n-1)\tau]$, а начальное условие для $x=\varphi_n(t)$ будет иметь вид $x(t_0+(n-1)\tau)= =\varphi_{n-1}(t_0+(n-1)\tau)$.

Этот метод дает возможность определить решение $x(t)$ на некотором конечном отрезке и одновременно доказывает существование решения в окрестности точки $(t_0,\varphi(t_0))$, если φ и f непрерывны в рассматриваемой области изменения переменных, а также его единственность, если функция f удовлетворяет одному из условий, обеспечивающих единственность решения уравнения

$$\dot{x}(t)=f(t,x(t),\varphi_0(t-\tau))$$

без отклонений аргумента, например условию Липшица по второму аргументу

Пример 1.

$$\dot{x}(t)=6x(t-1),\ x=t \text{ при } 0\le t\le 1.$$

Определить $x(t)$ при $1<t\le 3$.

Применяя метод шагов, получим

$$\dot{x}(t)=6(t-1), 1\le t\le 2,\ x(1)=1,$$

и интегрируя, находим

$$x(t)=3(t-1)^2+1$$

при $2\le t\le 3,\ \dot{x}(t)=6[3(t-2)^2+1],\ \ x(2)=4,$ откуда $x(t)=6(t-2)^3+6t-8.$

Пример 2.

$$\dot{x}(t)=ax(t-\tau).$$

Начальная функция $\varphi(t)\equiv C,\quad t_0-\tau\le t\le t_0,\quad a,C$ и τ — постоянные, $\tau>0$.

Применяя метод шагов, получим

$$x(t)=C\sum_{n=0}^{\left[\frac{t-t_0}{\tau}\right]+1} a^n\frac{(t-t_0-(n-1)\tau)^n}{n!},\ \text{ где } [t] - \text{целая часть } t.$$

Заметим,что даже в случае существования непрерывности производных от функции φ и f сколь угодно высокого порядка решение основной начальной задачи будет, вообще говоря, иметь разрыв первого рода у производной порядка k в точке $t_0+(k-1)\tau$, но производные более низких порядков в этой точке будут уже непрерывны. Действительно, в точке t_0 первая производная $\dot{x}(t)$ имеет разрыв первого рода, так как, интегрируя уравнение

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), \varphi_0(t-\tau)),\ t_0 \le t \le t_0+\tau,$$

можно удовлетворять условию $x(t_0)=\varphi_0(t_0)$, но не всегда можно удовлетворить условию $\dot{x}(t_0+0)=\dot{\varphi}_0(t_0-0)$. Лишь при специальном выборе начальной функции $\varphi_0(t)$ может быть обеспечена непрерывность производной решения в точке t_0, для этого функция $\varphi_0(t)$ должна удовлетворять условию $\dot{\varphi}_0(t_0-0)=f(t_0, \varphi_0(t_0), \varphi_0(t_0-\tau))$.

Очевидно, что метод последовательного интегрирования и вытекающие из него следствия распространяются и на дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом с непрерывным переменным запаздыванием $\tau(t)$. При применении этого метода решение уравнения

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t-\tau(t))),$$

где $x(t)=\varphi_0(t)$ на начальном множестве E_{l_0}, определяется из уравнения без запаздывания

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), \varphi_0(t-\tau(t))),\ x(t_0)=\varphi(t_0)$$

при t, изменяющемся на отрезке $\xi_{l_0}=[t_0, \gamma(t_0)]$. Этот отрезок является максимальным отрезком, начинающимся от точки t_0, для точек которого разность $t-\tau(t)\le t_0$.

Заметим, что $\gamma(t)$ является обратной функцией для функции $t-\tau(t)$, если обратная функция существует.

Затем определяем решение на отрезке $\xi_{\gamma(l_0)}=[\gamma(t_0), \gamma(\gamma(t_0))]$ из уравнения

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), \varphi_1(t-\tau(t))),$$
$$x(\gamma(t_0)) = \varphi_1(\gamma(t_0)),$$

где $\varphi_1(t)$ является продолжением (расширением) функции $\varphi_0(t)$ решением уравнения на отрезке $[t_0, \gamma(t_0)]$ (если $t-\tau(t)$ монотонно возрастает, то $\varphi_1(t)$ является решением уравнения на отрезке $[t_0, \gamma(t_0)]$),и, продолжая этот процесс, можно свести задачу к интегрированию уравнений без запаздывания.

В дальнейшем вместо $\gamma(\gamma(t_0))$ мы будем писать $\gamma_2(t_0)$, а $\gamma_n(t)$ будет обозначать n-кратную итерацию операции $\gamma(t)$.

Случай, когда указанный процесс последовательного определения решения на отрезках $\xi_{\gamma_n(l)}$ не может быть продолжен дальше некоторой точки

$\bar{t} \geq t_0$, будем называть особым. Он может, очевидно, наступить лишь в случае обращения функции $\tau(t)$ в нуль в точке $\bar{t}$. Доказательство существования решения и его единственности в особом случае будет дано в следующем параграфе.

2.3. Линейные уравнения с постоянными коэффициентами и постоянными отклонениями аргумента. Устойчивость решения

Если в уравнении

$$\sum_{p=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} a_{pj}x^{(p)}(t-\tau_j) = f(t), \tag{3.34}$$

все коэффициенты a_{pj} и все отклонения аргументов τ_j постоянны, то уравнение (3.34) называется линейным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами и с постоянными отклонениями аргумента.

Предположим,что

$$0 = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_m.$$

Если $a_{n_0} \neq 0$, а остальные $a_{n_j} = 0$, то $m_0 = n$, $\mu < n$, $\lambda > 0$ — уравнение (3.34) является уравнением с запаздывающим аргументом. Если $a_{n0} \neq 0$ и хотя бы для одного $j > 0$ $a_{nj} \neq 0$, то $m_0 = n$, $\mu = n$, $\lambda = 0$, уравнение (3.34) является уравнением нейтрального типа.

Рассмотрим вначале линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами и с постоянными отклонениями аргумента

$$\sum_{p=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} a_{pj}x^{(p)}(t-\tau_j) = 0 \tag{3.35}$$

(такие уравнения часто называют стационарными линейными однородными уравнениями с отклоняющимся аргументом).

Будем искать частные решения уравнения (3.35) в виде

$$x(t) = e^{kt}, \tag{3.36}$$

где k— постоянная.

Подставляя (3.36) в (3.35) и сокращая на e^{kt}, получим для определения k так называемое характеристическое уравнение

$$\sum_{p=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} a_{pj}k^p e^{-k\tau_j} = 0. \tag{3.37}$$

Левая часть уравнения (3.37):

$$\Phi(k) \equiv \sum_{p=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} a_{pj} k^p e^{-k\tau_j}$$

называется характеристическим квазиполиномом. Уравнение (3.37) имеет бесконечное множество корней. Каждому корню k_i соответствует решение $e^{k_i t}$. Линейные комбинации решений $\sum\limits_{s=0}^{q} C_s e^{k_s t}$ с постоянными коэффициентами C_s и даже сумма бесконечного ряда

$$\sum_{s=0}^{\infty} C_s e^{k_s t} \tag{3.38}$$

решений, если ряд (3.38) сходится и допускает n-кратное почленное дифференцирование, также являются решениями уравнения (3.35).

Если все коэффициенты a_{pj} действительны, то комплексным корням $(k = p \pm qi)$ уравнения (3.38) соответствуют комплексные решения $e^{pt}\cos qt$, $e^{pt}\sin qt$, являющиеся соответственно действительной и мнимой частями решения $e^{(p+qi)l}$.

Известно [23], что кратным корням k_i уравнения (2.8) кратности α_i соответствует не только решение $e^{k_i t}$, но и $te^{k_i t}, \ldots, t_{\alpha_i - 1} e^{k_i t}$, и, следовательно, если ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} P_i e^{k_i t}, \tag{3.39}$$

где $P_i(t)$ — многочлены с произвольными постоянными коэффициентами степени $\alpha_i - 1$, сходится и допускает n-кратное почленно дифференцирование, то его сумма является решением уравнения (3.36).

Одним из основных методов решения стационарных однородных уравнений

$$\sum_{p=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} a_{pj} x^{(p)}(t - \tau_j) = 0, \tag{3.40}$$

где $0 = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_m$, является нахождение частных решений вида e^{kt} и разложение искомого решения *x(t)* в ряд по этим основным решениям. При этом, как было указано в предыдущем параграфе, k должно быть корнем характеристического квазиполинома:

$$\Phi(z) = \sum_{p=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} a_{pj} z^p e^{-\tau_j z}.$$

Исследованию расположения корней таких квазиполиномов мы и займемся. Квазиполином является целой аналитической функцией, если функция $\Phi(z)$ не вырождается в полином, т. е., если в уравнение (3.37) существенно входит отклонение аргумента, то $\Phi(z)$ имеет бесконечное множество нулей, единственной предельной точкой которых является бесконечность.

Если уравнение (3.38) является уравнением с запаздывающим аргументом (т.е. при $a_{n0} = 0, a_{nj} = 0 : \ j = 1, 2, \ldots, m$), то все корни z_i квазиполинома $\Phi(z)$ лежат в левой полуплоскости: $Rez_i \leq N$

Действительно, в рассматриваемом случае не может быть корней с неограниченно возрастающей действительной частью, так как при $Rez \to +\infty$ порядок роста модуля $|a_{n0}z^n|$ выше порядка роста каждого из остальных слагаемых квазиполинома и, следовательно, выше порядка роста модуля их суммы

$$|\sum_{p=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m} a_{pj} z^p e^{-\tau_j z}|.$$

Для более точного описания распределения корней представим любой член квазиполинома $z^p e^{\tau z}$ в виде $e^{p \ln z - \tau z}$, тогда $|z^p e^{-\tau z}| = e^{p \ln|z| - \tau Re z}$. Отсюда видно, что $|z^p e^{-\tau z}|$ является монотонно возрастающей функцией $p \ln|z| - \tau Re\ z$, и если в каком-нибудь квазиполиноме при $z \to \infty$ по какому-нибудь направлению $arg\, z = const$, или по какому-нибудь иному закону возрастания *z=z(t)*, для одного члена квазиполинома значение $\mu = p \ln|z| - \tau Re\ z$ больше аналогичного выражения для других членов, то в этом направлении данной кривой $z = z(t)$ при $z \to \infty$ не может быть нулей квазиполинома. Если же $z \to \infty$ по некоторой кривой $z = z(t)$ для нескольких членов квазиполинома величины $\mu = p \ln|z| - \tau Re\ z$ совпадают и превосходят значения μ для других членов, то вдоль этой кривой могут быть нули z_k квазиполинома. Для уравнений нейтрального типа расположение корней квазиполинома является более сложным [23].

Доказано [4], что в случае систем запаздывающего типа при $Re(k)<0$ решение системы экспоненциально устойчиво. Найдем теперь области устойчивости (и неустойчивости) для некоторых уравнений с запаздыванием. Для этого будем строить "граничные" кривые, которые на полученных нами координатных плоскостях отделяют области асимптотической устойчивости и неустойчивости (в последних областях мы также укажем число неустойчивых корней соответствующих квазиполиномов). Данный метод в некоторых случаях позволяет эффективно решать задачи устойчивости.

Пример 3. Найти область устойчивости в пространстве коэффициентов a и b решений уравнения

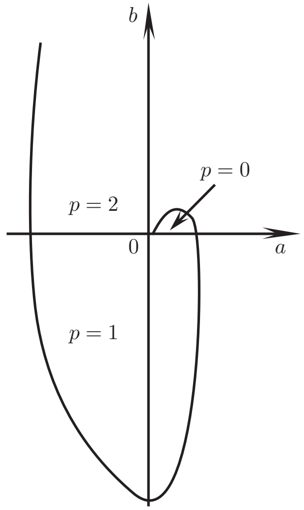

Рис. 15

$$\ddot{x}(t) + a\dot{x}(t) + bx(t-1) = 0.$$

Рассмотрим поведение граничных кривых. Характеристическое уравнение имеет следующий вид: $z^2 + az + be^{-z} = 0$. При $z = 0$ $b = 0$ Далее, при $z = iy$, $0 < y < \infty$, получим

$$-y^2 + aiy + b(\cos y - i\sin y) = 0,$$

откуда

$$b\cos y - y^2 = 0,\ ay - b\sin y = 0,$$

или

$$b = \frac{y^2}{\cos y},\ a = \frac{y\sin y}{\cos y}.$$

На рис. 15 изображена данная кривая. Она имеет спиралевидную форму. Подсчитано также число корней p с положительной вещественной частью в различных областях, образованных граничными кривыми. Отсюда получаем область асимптотической устойчивости ($p = 0$).

2.4. Случай малого отклонения аргумента

Если в стационарном линейном уравнении

$$x_{(n)}(t) + \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m} a_{kj}x^{(k)}(t-\tau_j) = 0, \tag{3.41}$$

где $0 = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_m$, запаздывание τ_m достаточно мало, то естественно ожидать, что многие свойства решений уравнения (3.41) будут близкими к свойствам решений уравнения без отклонений аргумента

$$x_{(n)}(t) + \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m} a_{kj}x^{(k)}(t) = 0, \tag{3.42}$$

получающегося из (3.41) при $\tau_j = 0$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$.

В частности, справедливы следующие теоремы.

Теорема 29. *Если решения уравнения (3.42) асимптотически устойчивы, то при достаточно малом τ_m асимптотически устойчивы и решения уравнения (3.41).*

Теорема 30. *Если характеристическое уравнение для уравнения (3.42) имеет хотя бы один корень с положительной действительной частью и, следовательно, решения уравнения (3.42) неустойчивы, то при достаточно малом τ_m неустойчивы и решения уравнения (3.41).*

Теорема 31. *Если характеристическое уравнение для уравнения (3.42) имеет простой корень* z=0*, а остальные корни имеют отрицательную действительную часть, то при достаточно малом τ_m решение уравнения (3.41) устойчиво.*

Доказательство. Действительно, при достаточно малом τ_m все множители $e^{-\tau_j z}$ при $|z| < M$ сколь угодно близки к единице, следовательно, характеристический квазиполином $\psi(z)$ для уравнения (3.42) может быть представлен в виде

$$\psi(z) = \varphi(z) + \eta(z),$$

где $\varphi(z)$ — характеристический полином для уравнения (3.43), а $|\eta(z)| < \varepsilon$ в области $|z| < M$ при $\tau_m < \delta(\varepsilon,\ M)$, где ε—сколь угодно малое положительное число.

Все корни полинома $\varphi(z)$ расположены внутри некоторого круга $|z| < M$. Применяя теорему Руше [4,24] к сколь угодно малым контурам C_j, каждый из которых обходит некоторый корень z_j полинома $\varphi(z)$, получим, что в сколь угодно малой окрестности каждого корня полинома $\varphi(z)$ при достаточно малом τ_m расположен корень квазиполинома $\psi(z)$. Принимая во внимание такое соответствие в расположении корней функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$, а также учитывая, что все остальные корни квазиполинома $\psi(z)$ при достаточно малом τ_m обладают сколь угодно большой по модулю отрицательной действительной частью, получим утверждение теорем 29 и 30, так как при выполнении условий теоремы 29 все корни квазиполинома будут иметь отрицательные действительные части,а при выполнении условий теоремы 30 квазиполином будет иметь хотя бы один корень с положительной действительной частью.

Справедливость теоремы 31 следует из того, что при достаточно малом τ_m все корни квазиполинома $\psi(z)$, кроме одного, будут иметь отрицательную действительную часть, так как они или будут близки к корням полинома $\varphi(z)$ с отрицательной действительной частью, или их действительная часть будет отрицательна и сколь угодно велика по модулю. Один же корень квазиполинома, который должен быть близок к корню *z=0* полинома $\varphi(z)$, будет также равен нулю, так как $\psi(0) = \varphi(0) = 0$. Все сказанное справедливо и для систем уравнений с запаздывающим аргументом.

В качестве примера рассмотрим уравнение

$$\dot{x}(t) + ax(t) + bx(t-\tau) = 0, \tag{3.43}$$

а также приближенное уравнение

$$\dot{x}(t) + (a+b)x(t) = 0 \tag{3.44}$$

и проиллюстрируем малость τ, чтобы теоремы 29, 30 и 31 были справедливы.

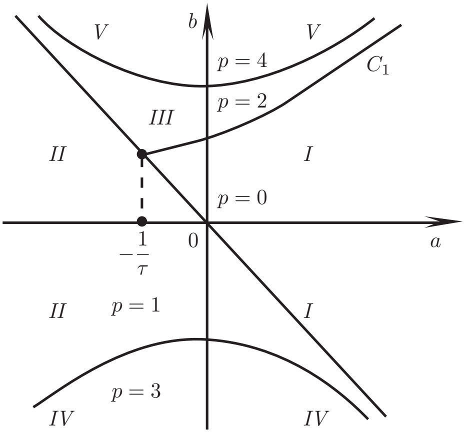

Рис. 16

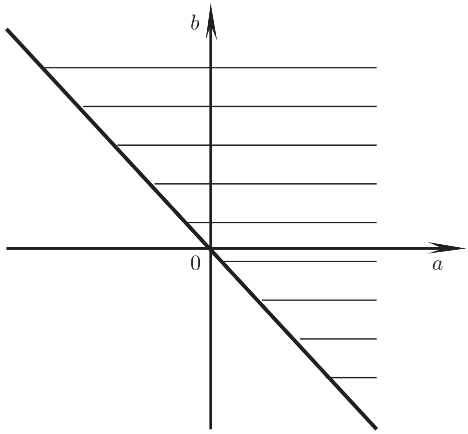

Рис. 17

Область устойчивости для решений уравнения (3.43) изображена на рис.16, а для решений уравнения (3.44) — на рис.17. На рис. 16 показано также число корней p с положительной вещественной частью в различных областях.

Из сравнения этих областей следует:

1) Если решения уравнения (3.44) неустойчивы, то неустойчивы и решения уравнения (3.43) при любом τ;

2) Если решения уравнения (3.44) асимптотически устойчивы и $|b| < a$, то решения уравнения (3.43) асимптотически устойчивы про любом τ;

3) Если характеристическое уравнение для уравнения (3.44) имеет корень $z = 0$, т.е. $a + b = 0$, то решения уравнения (3.43) устойчивы при $b < 0$ при любом τ, а при $b > 0$ при $\tau < \frac{1}{b}$;

4) В случае асимптотической устойчивости решений уравнения (3.43) при $|b| < a$ оценка для τ может быть получена из уравнений граничной кривой C_1:

$$a + b\cos\tau y = 0,$$
$$y - b\sin\tau y = 0,$$
$$0 < y < \frac{\pi}{\tau}.$$

Исключая y и разрешая относительно τ, получим

$$\tau = \frac{\arccos(\frac{a}{b})}{\sqrt{b^2 + a^2}}.$$

Итак, в рассматриваемом случае решение уравнения (3.43) асимптотически устойчиво при

$$0 \le \tau < \frac{\arccos(\frac{a}{b})}{\sqrt{b^2 + a^2}}.$$

Для уравнений нейтрального типа столь полное соответствие в отношении устойчивости между решениями уравнений

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} a_{kj}x^{(k)}(t - \tau_j) = 0,\ a_{n0} \neq 0 \tag{3.45}$$

и

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} a_{kj}x^{(k)}(t) = 0 \tag{3.46}$$

при малом τ_m наблюдается без дополнительных ограничений лишь в случае неустойчивости при наличии хотя бы одного корня с положительной действительной частью характеристического полинома $\varphi(z)$ для уравнения (3.46).

2.5. Исследование устойчивости с помощью функционалов Ляпунова—Красовского

Прямое перенесение методов исследования устойчивости систем с запаздыванием с помощью функций Ляпунова возможно в весьма редких случаях. Приведем конкретный пример. Рассмотрим систему второго порядка:

$$dx(t)/dt = y(t) - x(t)y^2(t - \tau_1(t)),$$
$$dy(t)/dt = -x(t) - y(t)x^2(t - \tau_2(t)). \tag{3.47}$$

Здесь $\tau_j(t) > 0$ $j = 1, 2$. Пусть функция Ляпунова имеет следующий вид: $V(x, y) = x^2 + y^2$. Очевидно, ее производная в силу системы (3.47), имеющая вид

$$(dV/dt)_{(1)} = -2(x^2(t)y^2(t - \tau_1(t)) + (y^2(t)x^2(t - \tau_2(t)),$$

определенно отрицательна. Следовательно, система (3.47) асимптотически устойчива. Очевидно, требование определенной отрицательности dV/dt является слишком жестким. Уже для линейного уравнения первого порядка с постоянным запаздыванием

$$dx(t)/dt = -ax(t) + bx(t-\tau) \tag{3.48}$$

($\tau > 0$) построение подобной функции Ляпунова методами, приведенными выше, невозможно. Модификацией исследования устойчивости методом функций Ляпунова является требование знакоотрицательности производной на кривых, удовлетворяющих требованию: $V(x_1(\xi), x_2(\xi), ..., x_n(\xi), \xi) < f(V(x_1(t), x_2(t), ...x_n(t), t))$: $t - h \leq \xi < t$, где $f(r)$ — какая-либо непрерывная функция, удовлетворяющая неравенству $f(r) > 0$: $r > 0$, и $f(r") - f(r') > 0$: $r»r'$. Справедлива следующая теорема [24, с. 136].

Теорема 32. *Если можно указать такую определенно положительную функцию $V(x_1(t), x_2(t), ...x_n(t), t)$, допускающую бесконечно малый высший предел, и при этом ее производная dV/dt, составленная в силу системы*

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t-\tau(t))), \tag{3.49}$$

удовлетворяет условиям, приведенным выше, то решение системы (3.49) асимптотически устойчиво.

Доказательство этой теоремы приведено, например в [11].

В качестве примера рассмотрим асимптотическое поведение системы (3.48) при $a > 0$. Возьмем в качестве функции Ляпунова $V(x) = x^2$. Имеем следующее неравенство для dV/dt в силу (3.49) при $|x(s)| < |x(t)$: $t - \tau \leq s < t$:

$$dV/dt = 2x(t)[-ax(t) + bx(t-\tau)] < -2x^2(t)[a-b].$$

Следовательно, если при всех t справедливо неравенство $a - |b|>0$, то условия теоремы выполняются, т.е. решение уравнения (3.49) асимптотически устойчиво. Результат, полученный нами, справедлив при любых постоянных запаздываниях (уравнение (3.49) абсолютно устойчиво); данный метод не позволяет получить более точные результаты.

Дальнейшим развитием методов исследования устойчивости систем с запаздыванием является метод функционалов Ляпунова — Красовского. Приведем несколько примеров данных функционалов.

$$1) V[t, \tau, x(.)] = x^2(t) + \int_{t-\tau}^{t} \beta(s)x^2(s)ds = x^2 + \int_{-\tau}^{0} \beta(t+\nu)x^2(t+\nu)d\nu,$$

где $\beta(s)$ — непрерывная функция переменной s;

$$2) V[t, \tau, x(.), y(.)] = \int_{-\tau}^{0} \int_{-\tau}^{0} \gamma(s, x(s), x(\nu), y(s), y(\nu)) ds d\nu,$$

где $\gamma(s, x, y, p, q)$ — непрерывная функция переменных s, x, y, p, q;

$$3) V[t, \tau, x(.)] = \int_{t-\tau}^{t} x^2(s) ds.$$

При исследовании асимптотических свойств систем с запаздыванием используется совокупность следующих теорем.

Теорема 33. *Если для дифференциальных уравнений с запаздыванием*

$$dx_i(t)/dt = f_i(t, x_1(t), ...x_n(t), x_1(t - \tau_1(t)), ...x_n(t - \tau_1(t)),$$

$$x_1(t - \tau_2(t)), ..., x_n(t - \tau_2(t)), ..., x_1(t - \tau_k(t)), ...x_n(t - \tau_k(t))),$$

$$0 < \tau_1(t) < \tau_2(t) < \tau_k(t), \ \ i = 1, ...n$$

(k — натуральное число) можно найти знакоопределенный функционал $V(t, x_1(.), ..., x_n(.))$, допускающий бесконечно малый высший предел такой, что производная функционала $dV/dt(t, x_1(.), ..., x_n(.))/dt$, вычисленная в силу этой системы, является знакопостоянной знака, противоположного с $V(t, x_1(.), ..., x_n(.))$, либо тождественно равна нулю, то невозмущенное движение, определяемое этой системой, устойчиво.

Теорема 34. *Если же для рассматриваемой системы можно найти знакоопределенный функционал $V(t, x_1(.), ..., x_n(.))$, допускающий бесконечно малый высший предел, производная функционала $dV(t, x_1(.), ..., x_n(.))/dt$, вычисленная в силу этой системы является знакоопределенной, знака противоположного с $V(t, x_1(.), ..., x_n(.))$, то невозмущенное движение, определяемое этой системой, асимптотически устойчиво.*

Требование определенной положительности функционала состоит в том, что существует непрерывная функция $\varphi(r)$ такая, что $\varphi(r) > 0$: $r > 0$, и при этом справедливо неравенство

$$V(s, x_1(.), ..., x_n(.)) \geq \varphi(\|x(s)\|;$$

для существования бесконечно малого высшего предела вводится норма вектор-функции на отрезке

$$\|x(s)\|_\tau = \sup_{-\tau \leq s \leq 0} \|x(s)\| : \ \ \tau = \sup_t \tau_k(t);$$

и требование определенной положительности $V(s, x_1(.), ..., x_n(.))$ состоит в выполнении неравенства

$$V(s, x_1(.), ..., x_n(.)) \leq \varphi_1(\|x(s)\|_\tau),$$

здесь непрерывная функция $\varphi_1(r)$ удовлетворяет условиям $\varphi_1(r) > 0$: $r > 0$, $\varphi_1(0) = 0$. Доказательство данных теорем осуществляется методами, аналогичными использованным ранее при доказательстве теорем 4 и 5 для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Отметим следующее: функционал 1) является определенно положительным при положительной функции $\beta(s)$, функционал же 3) не является определенно положительным [25]. Рассмотрим достоинства этого метода. Рассмотрим уравнение первого порядка (3.48). Для исследования асимптотических свойств этого уравнения рассмотрим функционал $V(t, x(.)) = x^2(t) + 2\alpha \int_{t-\tau}^{t} x^2(s)ds$, $\alpha = \text{const}$, $\alpha > 0$. Проверим выполнение условий теоремы 34. Очевидно, $V(t, x(.)) \leq r^2 + C\hat{r}^2 : C \geq 2\alpha$, $r = \|x\|$, $\hat{r} = \|x\|_\tau$; $V(t, x(.)) \geq r^2$. Производная

$$dV(t, x(.))/dt = -2[(a - \alpha)x^2(t) + bx(t)x(t - \tau) + \alpha x^2(t - \tau)]$$

является квадратичной формой переменных $x(t), x(t - \tau)$. Данная квадратичная форма является определенно отрицательной при $\alpha = 0.5a$, $|b| < a$. Получили достаточное условие асимптотической устойчивости. К достоинствам этого метода является то, что, используя совокупность функционалов 1)—3) , учитывая свойства корней характеристического квазиполинома, можно получить весьма точные условия асимптотической устойчивости уравнения и при $a = 0$ [26].

Приведем теперь пример исследования неустойчивости некоторой системы. Рассмотрим систему второго порядка:

$$dx(t)/dt = x(t) + x(t)y^2(t - \tau),$$

$$dy(t)/dt = t_0 e^t \left[ay^5(t) + [b + \sin(t)]y^5(t - \tau)\right], \tag{3.50}$$

где $x(t), y(t)$ — скалярные функции времени t, $a = \text{const}$, $a > 1$, $b = \text{const}$ (к данной системе заменой времени (аргумента) сводятся некоторые системы с линейным запаздыванием [4]).

Рассмотрим знакопеременный функционал

$$V(t, \tau, x(t), y(t)) = x^2(t) + \frac{e^{-t}y^6(t)}{6t_0} - \frac{a}{2}\int_{t-\tau}^{t} y^{10}(s)ds$$

и вычислим $dV(t,\tau,x(t),y(t))/dt$ в силу системы (3.50). Имеем равенство

$$dV(t,\tau,x(t),y(t))/dt = 2(x^2(t) + x^2(t)y^2(t-\tau)) - \frac{e^{-t}y^6(t)}{6t_0} +$$

$$+ \left[\frac{a}{2}y^{10}(t) + (b+\sin(t))y^5(t)y^5(t-\tau) + \frac{a}{2}y^{10}(t-\tau)\right]. \qquad (3.51)$$

Рассмотрим теперь выражение в квадратных скобках в правой части равенства (3.51). Данная квадратичная форма переменных $y^5(t), y^5(t-\tau)$ определенно положительна при $|b| < a-1$. Получили достаточное условие неустойчивости системы (3.50).

3. Стабилизация некоторых линейных систем с запаздыванием

Стабилизация линейных однородных систем с постоянным запаздыванием осуществляется с помощью совокупности функционалов 1)—3). В частности, при стабилизации системы с постоянным запаздыванием

$$dx_i(t)/dt = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_j(t) + \sum_{j=1}^{m} b_{ij}x_j(t-\tau) + c_j u(t)$$

при минимизации соответствующего квадратичного функционала (критерии качества) полученное оптимальное управление имеет вид

$$u^0(t) = \sum_{s=1}^{m}\left[\beta_s x_s(t) + \int_{-\tau}^{0} G_s(\nu)x(t+\nu)d\nu\right].$$

К сожалению, при этом возникают большие трудности, связанные, в частности, с решением трансцендентных уравнений [26]. Укажем некоторые классы систем с запаздыванием, которые стабилизируются более простыми методами, приведенными ранее при стабилизации систем обыкновенных дифференциальных уравнений и разностных систем.

I) Рассмотрим управляемые системы вида

$$dx(t)/dt = Ax(t) + \sum_{j=1}^{k} B_j x(t-\tau_j) + Cu(t). \qquad (3.52)$$

Полагаем, что при $u(t) \equiv 0$ решение данной системы неустойчиво, при этом неустойчиво и решение системы без запаздывающих членов

$$dy(t)/dt = Ay(t).$$

Будем стабилизировать систему без запаздывающих членов, используя алгоритм, определенный равенством (2.40): $u = -C^\top \bar{\Gamma} y(t)$. При этом полагаем, что матрица A^{-1} существует. Рассмотрим уравнение (2.41), которому удовлетворяет матрица $\bar{\Gamma}$. Как уже отмечалось, при стабилизации "невозмущенной" таким образом системы (системы без запаздывания) при $\alpha \to \infty$ элементы полученной матрицы (без запаздывающмх членов) становятся весьма большими; производная же $dV(t,x)/dt$, составленная в силу уравнений "возмущенной" системы (системы с запаздыванием), имеет вид

$$dV(t,x)/dt \approx -\alpha V(t, x(t) + 2\langle \bar{\Gamma} x(t), \sum_{j=1}^{k} B_j x(t-\tau_j)\rangle,$$

также имеет доминирующими членами знакоотрицательные величины, имеющие множителем коэффициент α. Здесь $\langle x, y\rangle$ — скалярное произведение векторов x, y. Следовательно, в некоторых случаях корни характеристического уравнения стабилизированной "возмущенной" системы

$$det\{A + CC^\top \bar{\Gamma} + \sum_{j=1}^{k} B_j e^{-\lambda\tau_j} - \lambda E\} = 0$$

имеют отрицательную вещественную часть. Приведем конкретный пример.

Рассмотрим управляемую систему, описывающую колебания вертикального маятника с нижней точкой подвеса. При этом полагаем, что на маятник действует упругая сила, пропорциональная величине $x_1(t-1)$ (аналог вязкого трения), где $x(t)$ — координата маятника. С учетом (1.23), имеем следующую систему:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) + 0.2x_1(t-1), \\ \dot{x}_2(t) &= x_1(t) + u(t). \end{aligned} \tag{3.53}$$

Система без запаздывающих членов имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_1^0(t) &= x_2^0(t), \\ \dot{x}_2^0(t) &= x_1^0(t) + u(t). \end{aligned}$$

Матрица последней системы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

в качестве одного из собственных значений имеет $\lambda^0 = 1$. Характеристическое уравнение, соответствующее системе с запаздыванием $\lambda^2 - 0.2\lambda e^{-\lambda} - 1 =$

0, обладает неустойчивым корнем $\lambda = 1.036$. Таким образом, неустойчивы и система без запаздывающих членов, и система с запаздыванием.

Для управляемой системы без запаздывающих матрица системы представима в виде

$$\bar{\Gamma}(\alpha) = \begin{pmatrix} 0.5\alpha(\alpha-2) & 0.5\alpha^2 \\ 0.5\alpha^2 & \alpha \end{pmatrix}, \qquad (3.52)$$

и закон управления будет следующим $u(t) = -0.5\alpha^2 x_1^0(t) - \alpha x_2^0(t)$. Матрица $\bar{\Gamma}$ знакоотрицательна при $\alpha^2 > 4$. Пусть $\alpha = 4$. Для стабилизированной таким образом системы с запаздыванием получаем характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + 4\lambda - 0.2\lambda e^{-\lambda} - 0.8e^{-\lambda} + 7 = 0.$$

Его корень с наименьшей вещественной частью $\lambda_s = -1.264$. Таким образом, система с запаздыванием становится экспоненциально устойчивой.

2) Управляемая система имеет вид

$$dx(t)/dt = Ax(t) + \sum_{j=1}^{k} B_j x(t - (n_j\sigma + \delta_j)) + Cu(t). \qquad (3.54)$$

Здесь n_j — натуральные числа, при этом $n_1 < n_2 < ... < n_k$, δ_j — достаточно малые действительные числа. Ввиду того, что при экспоненциальной устойчивости системы с запаздыванием экспоненциально устойчива и система с запаздываниями, мало отличающимися от запаздываний в исходной системе, стабилизируем систему с соизмеримыми запаздываниями вида

$$dx^0(t)/dt = Ax^0(t) + \sum_{j=1}^{k} B_j x(t - (n_j\sigma)) + Cu^0(t).$$

Для стабилизации же данной системы разобьем интервал $[0, \sigma]$ на l равных подинтервалов длиной $h = \frac{\sigma}{l}$. Воспользовавшись приближенной формулой $x(t_k + h) \approx x(t_k) + h\dot{x}(t_k)$, получаем управляемую разностную систему для значений $t_k = kh$: $k = 1, 2, ...$

$$x_{k+1} = (A + hE)x_k + \sum_{j=1}^{k} B_j x_{k-l_j} + u^0.$$

Здесь $l_j h = n_j\sigma$ $j = 1, 2, ...k$. Полученная система является разностной. Стабилизируя ее методами, изложенными выше, т.е., находя управление $u^0 = \sum_{i=1}^{l_k} \alpha_i x^0(t - ih)$, получим, что решение приближенной системы с соизмеримыми запаздываниями является экспоненциально устойчивым, следовательно, и решение исходной системы (3.54) будет экспоненциально устойчивым.

3) Рассмотрим управляемую систему с запаздыванием, линейно зависящим от времени (аргумента):

$$dx(t)/dt = Ax(t) + Bx(\mu t) + Cu(t), \ \ \mu = \text{const}, \ \ 0 < \mu < 1. \tag{3.55}$$

Данные системы встречаются в задачах физики, механики, биологии. Приведем вначале достаточные условия асимптотической устойчивости при отсутствии управляющего воздействия $u(t)$.

У т в е р ж д е н и е.

Полагаем $u(t) \equiv 0$. Пусть выполнены условия

$$1) Re(\lambda) < 0,$$

λ — корни характеристического уравнения

$$det\{A - \lambda E\} = 0;$$

и, наряду с этим условием,

$$2) |\rho| < 1,$$

где ρ — корни характеристического уравнения

$$det\{-A^{-1}B - \rho E\} = 0.$$

Тогда система (3.55) асимптотически устойчива. Приведем краткое доказательство данного утверждения. Считаем, что $t \geq T > t_0 >$ (при этом момент времени T такой, что существуют и непрерывны производные $x^j(t)$ до k-го порядка включительно. Дифференцируя обе части системы (3.55), получаем для x^1 уравнение

$$dx^1(t)/dt = Ax^1(t) + \mu Bx^1(\mu t), \ \ t \geq T.$$

Вновь дифференцируя обе части полученного уравнения, имеем схожую систему, при этом матрица B имеет множителем величину μ^2. Продолжая подобный процесс, получим для величины $x^{(k)}(t)$ уравнение

$$dx^{(k)}(t)/dt = Ax^{(k)}(t) + \mu^k Bx^{(k)}(\mu t), \ \ t \geq T. \tag{3.56}$$

Считая члены с запаздыванием неоднородностью, запишем решение последней системы (3.56) в форме Коши:

$$x^{(k)}(t) = e^{A(t-T)} + \int_T^t e^{A(t-s)} \mu^k Bx^{(k)}(\mu s) ds.$$

Ввиду предположений относительно собственных значений λ справедлива оценка

$$\|e^{A(t-s)}\| \leq Me^{-\beta(t-s)}, \;\; M = \text{const}, \;\; M \geq 1, \;\; \beta = \text{const}, \;\; \beta > 0.$$

Тогда из соотношения (3.56) получаем неравенство

$$\|x^{(k)}(t)\| = Me^{-\beta(t-T)} + \frac{M\mu^k\|B\|}{\beta} \max_t \|x^{(k)}(\mu t)\|. \tag{3.57}$$

Очевидно, что для достаточно большого k справедливо неравенство

$$\frac{M\mu^k\|B\|}{\beta} \leq \bar{q}, \;\; \bar{q} = \text{const}, \;\; 0 < \bar{q} < 1.$$

Методом последовательного интегрирования из (3.57) получаем оценку

$$\sup_{t\in\delta_n} \|x^{(k)}(t)\| \leq M_k q_k^n \sup_{t\in\delta_0} \|x^{(k)}(t)\|. \tag{3.58}$$

Здесь $M_k = \text{const}$, $M_k > 1$; $q_k = \text{const}$, $0 < q_k < 1$. Полуинтервалы δ_n определены следующим образом: $\delta_n = (T\mu^{n-1}, T\mu^n]$.

Рассмотрим теперь поведение $x^{(k-1)}(t)$, учитывая оценку (3.58). Из равенства, подобного (3.56), имеем неоднородное разностное уравнение

$$x^{(k-1)}(t) = -A^{-1}\mu^{k-1}Bx^{(k-1)}(\mu t) - A^{-1}x^{(k)}(t).$$

Считая величину $x^{(k)}(t)$ неоднородностью, запишем решение этой системы, используя формулу вариации постоянных для разностных уравнений при $t \in \delta$:

$$x^{(k-1)}(t) = \left(-A^{-1}\mu^{k-1}B\right)^n x^{(k-1)}(\mu^n t) + \sum_{j=0}^{n-1} \left(-A^{-1}\mu^{k-1}B\right)^j x^{(k)}(\mu^j t). \tag{3.59}$$

Ввиду ограничений на величины ρ для любого $n = 1, 2, ...$ справедливо неравенство

$$\|\left(-A^{-1}B\right)^n\| \leq \hat{L}q^n \;\; \hat{L} = \text{const}, \;\; \hat{L} > 1, \;\; q = \text{const}, \;\; 0 < q < 1.$$

Без ограничения общности считаем, что $q < q_k$, т.е. $q = \alpha q_k$: $\alpha = \text{const}$, $0 < \alpha < 1$. Учитывая это, из (3.59) имеем неравенство

$$\sup_{t\in h_n} \|x^{(k-1)}(t)\| \leq \hat{L}q^n \sup_{t\in\delta_0} \|x^{(k-1)}(t)\| +$$

$$+\hat{L}\|A^{-1}\|M_k \sum_{j=0}^{n-1} (\mu^{k-1}q)^j (q_k)^{n-j} \sup_{t\in\delta_0} \|x^{(k)}(t)\| <$$

$$< \hat{L}(q_k)^n \sup_{t\in\delta_0} \|x^{(k-1)}(t)\| \frac{M_{k-1}\|A^{-1}\|\hat{L}}{1-\alpha\mu^{k-1}}(q_k)n \sup_{t\in\delta_0} \|x^{(k)}(t)\|. \qquad (3.60)$$

Продолжая подобный процесс, получаем теперь подобные оценки и для величин $\sup\limits_{t\in h_n} \|x^{(i)}(t)\|$ $(i = k-2,\ \ i = k-3\ \ ...i = 0)$. Таким образом, получим достаточные условия асимптотической устойчивости системы с линейным запаздыванием.

Исходя из них, получаем следующий алгоритм стабилизации данной системы:

1) стабилизируем систему без запаздывающих членов:

$$dy(t)/dt = Ay(t) + Cu(t);$$

получаем систему

$$dx(t)/dt = A_1x(t) + Bx(\mu t) + Cu_1(t).$$

Здесь матрица A_1 (полученная в результате стабилизации системы без запаздывающих членов) имеет собственные значения с отрицательной вещественной частью. Может получиться, что при $u(t) \equiv 0$ решение данной системы асимптотически устойчиво (в частности, такое может получиться при достаточно малой матрице B). Если же полученная система неустойчива:

2) стабилизируем разностную систему

$$x(t) = -A^{-1}Bx(\mu t) - A^{-1}u_2(t);$$

получаем в результате

$$dx(t)/dt = A_1x(t) + B_1x(\mu t).$$

В данной системе матрица A_1 имеет собственные значения λ с отрицательной вещественной частью, и матрица $-A_1^{-1}B_1$ имеет собственные значения ρ меньше единицы по модулю. Мы осуществили стабилизацию системы с линейным запаздыванием. Этот алгоритм стабилизации осуществляется в два этапа. В некоторых случаях, полагая управление в соответствии с равенством (2.40), можно осуществить стабилизацию в один этап (при достаточно большом $\alpha > 0$. В самом деле, рассмотрим матричное уравнение (2.41). Покажем, что при $\alpha \to \infty$ матрица $\Gamma^{-1} \to 0$. Имеем из (2.41) матричное уравнение

$$\left(A + \frac{\alpha}{2}E\right)\Gamma^{-1} + \Gamma^{-1}\left(A^\top + \frac{\alpha}{2}E\right) = 2CC^\top.$$

Разделив обе части данного уравнения на α, при $\alpha \to \infty$ получаем предельное уравнение

$$\Gamma^{-1}\frac{1}{2} + \Gamma^{-1}\frac{1}{2} = 0.$$

Но решением последнего уравнения является нулевая матрица. Таким образом, $\Gamma^{-1} \to 0$ при $\alpha \to \infty$. Следовательно, при $\alpha \to \infty$ некоторые коэффициенты матрицы Γ становятся как угодно большими и могут существенно влиять на величину собственных значений ρ матрицы $A_1^{-1}B = (A - CC^\top\Gamma)^{-1}B$. Приведем конкретный пример.

При прохождении полоза токоприемника движущего локомотива через эластичную опору при некоторых скоростях возникает проблема стабилизации неустойчивых колебаний токоприемника (происходит "отрыв" полоза токоприемника от контактного провода в месте закрепления [15]. При скорости движения локомотива $v = 30\ m/c$ и при реальных параметрах токоприемника и элементов так называемой "легкой" контактной подвески [15], ими являются, в частности: расстояние L между опорами, эластичность s опорного узла, сила натяжения контактного провода и т.д. (отметим, что мы несколько идеализируем "легкую" контактную подвеску, схема ее и движущегося токоприемника представлена на рис. 18); задача успокоения полоза токоприемника сводится к стабилизации системы четвертого порядка (где координаты системы характеризуют, в частности, колебания полоза токоприемника, силу нажатия $P(t)$ полоза токоприемника на контактный провод, более подробно в [15,26]).

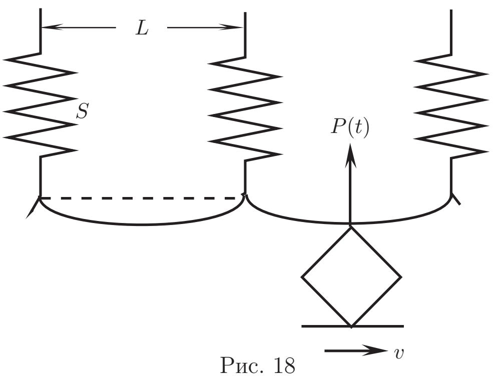

Рис. 18

Данная управляемая система имеет вид

$$dx(t)/dt = Ax(t) + Bx(\mu t) + Cu(t) \tag{3.61}$$

Здесь матрицы A, B и C определены следующим образом:

$$A = \begin{pmatrix} -0.38 & 0 & 0.153 & -1.1 \\ 0 & -0.187 & 0 & 1.143 \\ -1.499 & 0 & 0 & -1.713 \\ -0.393 & -0.95 & 1 & -0748 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0.267 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(управление u — скалярная величина).

Собственные значения матрицы A следующие: $\lambda_1 = -0.692 + 150i$, $\lambda_2 = -0.692 - 150i$, $\lambda_3 = -0.465$, $\lambda_4 = 0.02$ ($i = \sqrt{-1}$), т.е. система неустойчива. При $\alpha = 4$ вычисляем матрицу $\bar{\Gamma}$:

$$\bar{\Gamma} = \begin{pmatrix} 4.356 & 8.233 & -6.713 & -0.579 \\ 8.233 & 277.214 & -19.464 & 8.788 \\ -6.713 & -19.414 & 14.234 & 1.405 \\ -0.579 & 8.788 & 1.405 & 6.859 \end{pmatrix}.$$

Найдем собственные значения матрицы $A_s = A - CC^\top\bar{\Gamma}$. Имеем величины $-15 \pm 1.541i; -0.89; -0.19$. Далее, для собственных значений ρ матрицы $\left(A - CC^\top\bar{\Gamma}\right)^{-1} B$ получаем набор величин $-0.22; 0; 0; 0$. Следовательно, полагая в системе (3.61) управление $u(t) = -C^\top\Gamma = -6.713x_1(t) - 19.464x_2(t) + 14.234x_3(t) + 1.405x_4(t)$, получаем стабилизированную систему с матрицей

$$A_s = \begin{pmatrix} -0.89 & 0 & 0 & -1.1 \\ 0 & -0.19 & 0 & 1.14 \\ 10.5273 & -92.9599 & -28.8935 & -88.5795 \\ -0.39 & -0.95 & 1 & -0.75 \end{pmatrix}.$$

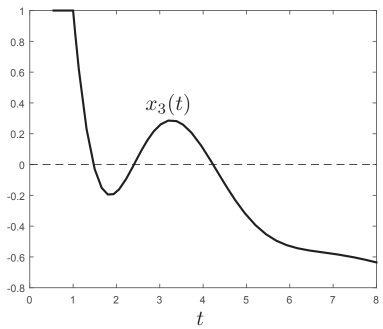

Рис. 19

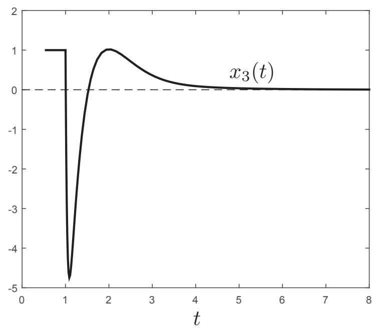

Рис. 20

Стабилизация осуществлена в один этап. Колебания полоза токоприемника нестабилизированной и стабилизированной системы представлены, соответственно, на рис. 19 и 20. Отметим, что вследствие достаточной жесткости опоры S в точке закрепления при прохождении опоры колебания полоза токоприемника имеют достаточно большую амплитуду (это видно на рис. 20).

Следствие. Стабилизацию подобными методами можно также осуществлять и для сингулярных систем вида

$$\varepsilon dx(t)/dt = Ax(t) + Bx(t-\tau) + Cu(t) \tag{3.62}$$

(здесь ε — достаточно малый положительный параметр). Пусть $u(t) \equiv 0$. Покажем, что достаточными условиями асимптотической устойчивости являются те же самые условия, что и для системы (3.55). Известно [4], что для асимптотической (экспоненциальной) устойчивости системы необходимо и достаточно, чтобы корни ν характеристического уравнения

$$\det\{exp(A + \frac{B}{\nu}) - \varepsilon\nu\} = 0 \tag{3.63}$$

были меньше единицы по модулю. Корни уравнения (3.63) связаны с корнями соответствующего квазиполинома соотношением

$$e^{\lambda\tau} = \nu. \tag{3.64}$$

Ввиду знакоотрицательности действительных частей собственных значений матрицы A корни уравнения (3.63) равномерно ограничены по модулю. В самом деле, запишем решение сингулярной системы (3.62) с помощью формулы Коши, считая члены с запаздыванием за неоднородность:

$$x(t) = e^{\varepsilon^{-1}A(t-t_0)} + \int_{t_0}^{t} e^{\varepsilon^{-1}A(t-s)} B\varepsilon^{-1} x(s-\tau)ds. \tag{3.65}$$

Учитывая оценку

$$\|e^{\varepsilon^{-1}A(t-s)}\| \le \bar{M}e^{-\varepsilon^{-1}\beta(t-s)}, \;\; \beta = \text{const}, \;\; \beta > 0, \;\; \bar{M} = \text{const}, \bar{M} > 1,$$

из (3.65) получаем неравенство

$$\sup_{t\in(t_0,t_0+\tau]} \|x(t)\| < \bar{M} + \frac{\bar{M}\|B\|}{\beta} \sup_{t\in[t_0-\tau,t_0]} \|x(t)\|.$$

Отсюда и следует равномерная ограниченность по модулю корней уравнения (3.63). Но тогда, учитывая (3.64), получаем, что мнимая часть корней λ находится в области $\frac{-\pi}{\tau} < Im(\lambda) \le \frac{\pi}{\tau}$, т.е. корни с неположительной вещественной частью могут лишь находиться в области

$$Re(\lambda) \le K, \;\; \frac{-\pi}{\tau} < Im(\lambda) \le \frac{\pi}{\tau}, \tag{3.66}$$

(K — положительная константа, не зависящая от параметра ε). В области (3.66) корни λ при малом ε как угодно близки к корням характеристического уравнения

$$\det\{A + Be^{-\lambda\tau}\} = 0.$$

Корнями этого уравнения являются величины $\lambda : e^{-\lambda\tau} \approx \rho$, т.е. $Re(\lambda) < 0$. Других же корней при малом ε соответствующий квазиполином не имеет. Отсюда получаем, что алгоритм стабилизации, приведенный для систем с линейным запаздыванием, применим и для ряда сингулярных систем.

Все численные решения систем с запаздыванием решены численными методами с помощью пакета программ, созданного учеными Уральского государственного университета им. Горького (основные идеи, использованные при его составлении, изложены, например, в [25]). Отметим, что схожие графики, являюшиеся результатом численного интегрировании данных систем, получаются и при использовании пакета прикладных программ MATLAB-7.1. В то же время программа, разработанная авторами, позволяет производить численное интегрирование и для систем с переменным запаздыванием и с нелипшицевой правой частью.

Заключение

Теория устойчивости движения как раздел качественной теории дифференциальных уравнений имеет уже более чем столетнюю историю. После того, как А. М. Ляпунов ввел определение устойчивости и предложил два основных метода исследования для решения задачи устойчивости, были введены новые понятия устойчивости, касающиеся различных факторов, порождающих возмущения в системе, развиты методы для систем с последействием, для систем, описываемых уравнениями в частных производных. Большой вклад в развитие теории устойчивости и оптимальной стабилизации внесли уральские математики во главе с академиком Н.Н Красовским. Много работ посвящено решению практических задач. Методы теории устойчивости широко применяются при конструировании автоматических систем управления самолетами, ракетами, кораблями, различными турбинами и двигателями. С помощью методов теории устойчивости исследуются различные задачи даже в биологии и социологии.

Теория устойчивости движения — активно развивающаяся область качественной теории дифференциальных уравнений. Идет развитие понятий теории для новых классов систем, совершенствуются методы исследования, возникают все новые и новые приложения теории в различных областях науки и техники.

Домашнее задание

1. Найти все точки покоя системы.
2. Установить тип точек покоя.
3. Изобразить фазовый потрет системы.

Вариант 1

$$\begin{cases} \dot{x} &= y - x^2 - x, \\ \dot{y} &= 3x - x^2 - y. \end{cases}$$

Вариант 2

$$\begin{cases} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= \sin(x + y). \end{cases}$$

Вариант 3

$$\begin{cases} \dot{x} &= 3 - \sqrt{4 + x^2 + y}, \\ \dot{y} &= \ln(x^2 - 3). \end{cases}$$

Вариант 4

$$\begin{cases} \dot{x} &= \ln(1 + y + \sin x), \\ \dot{y} &= 2 + \sqrt[3]{3\sin x - 8}. \end{cases}$$

Вариант 5

$$\begin{cases} \dot{x} &= -\sin y, \\ \dot{y} &= 2x + \sqrt{1 - 3x - \sin y}. \end{cases}$$

Вариант 6

$$\begin{cases} \dot{x} &= (x - 1)(y - 1), \\ \dot{y} &= xy - 2. \end{cases}$$

Вариант 7

$$\begin{cases} \dot{x} &= \ln(y^2 - x), \\ \dot{y} &= x - y - 1. \end{cases}$$

Вариант 8

$$\begin{cases} \dot{x} &= e^y - e^x, \\ \dot{y} &= \sqrt{3x + y^2} - 2. \end{cases}$$

Вариант 9

$$\begin{cases} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -\sin x. \end{cases}$$

Вариант 10

$$\begin{cases} \dot{x} &= e^{4x-y} - 1, \\ \dot{y} &= \sin x + 2y. \end{cases}$$

Вариант 11

$$\begin{cases} \dot{x} &= e^{2x-y} - 1, \\ \dot{y} &= 5x + \cos y - 1. \end{cases}$$

Вариант 12

$$\begin{cases} \dot{x} &= \sin(x + y), \\ \dot{y} &= -8x - 5y + x^2. \end{cases}$$

Вариант 13

$$\begin{cases} \dot{x} &= \sqrt{1 + 4x} - e^y, \\ \dot{y} &= 9\sin x - 4y. \end{cases}$$

Вариант 14

$$\begin{cases} \dot{x} &= \sqrt{1 - 2y} - 1, \\ \dot{y} &= \sin 3x + 4y. \end{cases}$$

Вариант 15

$$\begin{cases} \dot{x} &= 3x - 2e^y + 2, \\ \dot{y} &= \sqrt{1 + 4(x - y)} - 1. \end{cases}$$

Вариант 16

$$\begin{cases} \dot{x} &= \sin 2x + e^y - 1, \\ \dot{y} &= 2y. \end{cases}$$

Вариант 17

$$\begin{cases} \dot{x} &= 2xy - x + y, \\ \dot{y} &= 5x^4 + y^3 + 2x - 3y. \end{cases}$$

Вариант 18

$$\begin{cases} \dot{x} &= x^2 + y^2 - 2x, \\ \dot{y} &= 3x^2 - x + 3y. \end{cases}$$

Вариант 19

$$\begin{cases} \dot{x} &= e^{x+2y} - \cos 3x, \\ \dot{y} &= \sqrt{4+8x} - 2e^y. \end{cases}$$

Вариант 20

$$\begin{cases} \dot{x} &= \ln\left(4y + e^{-3x}\right), \\ \dot{y} &= 2y - 1 + \sqrt[3]{1-6x}. \end{cases}$$

Вариант 21

$$\begin{cases} \dot{x} &= \ln\left(3e^y - 2\cos x\right), \\ \dot{y} &= 2e^x - \sqrt[3]{8+12y}. \end{cases}$$

Вариант 22

$$\begin{cases} \dot{x} &= \operatorname{tg}(y-x) - 2x, \\ \dot{y} &= 2^y - 2\cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right). \end{cases}$$

Вариант 23

$$\begin{cases} \dot{x} &= \operatorname{tg}(-y) - 2x, \\ \dot{y} &= \sqrt{9+12x} - 3e^y. \end{cases}$$

Вариант 24

$$\begin{cases} \dot{x} &= 2xy - x + y, \\ \dot{y} &= 5x^4 + y^3 + 2x - 3y. \end{cases}$$

Вариант 25

$$\begin{cases} \dot{x} &= 2xy - x + y, \\ \dot{y} &= 5x^4 + y^3 + 2x - 3y. \end{cases}$$

Библиографический список

1. Альбрехт Э. Г. Лекции по теории стабилизации / Э. Г. Альбрехт, Г. С. Шелементьев. — Свердловск: Урал. гос. ун-т им. А.М. Горького, 1972. — 273 с.

2. Барбашин Е. А. Введение в теорию устойчивости / Е. А. Барбашин. — М.: Наука, 1967. — 224 с.

3. Барбашин Е. А. Функции Ляпунова / Е. А. Барбашин. — М.: Наука, 1970. — 240 с.

4. Беллман Р. Дифференциально-разностные уравнения / Р. Беллман, К. Кук. — М.: Мир, 1967. — 548 с.

5. Гребенщиков Б. Г. О стабилизации стационарных систем с запаздыванием, линейно зависящим от времени / Б. Г. Гребенщиков. — Казань: Изв. вузов. Математика. Деп. в ВИНИТИ, N 4384-92.

6. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости / Б. П. Демидович. — СПб.; М.; Краснодар: Лань, 2011. — 480 с.

7. Джеффрис Г. Методы матеметической физики / Г. Джеффрис, Б. Свирлс. — М.: Мир, 1969. Т.1. — 424 с.

8. Зубов В. И. Математические методы исследования систем автоматического регулирования / В. И. Зубов. — М.: Машиностроение, 1974.

9. Ким А. В. Прямой метод Ляпунова в теории систем с последействием. / А. В. Ким. — Екатеринбург: Изд-во Уральского гос. ун-та, 1992. — 144 с.

10. Комаров М. А. Линейные разностные уравнения и их приложения / М. А. Комаров. — Владимир: изд-во Владимирского гос. ун-та, 2012. — 46 с.

11. Красовский Н. Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения / Н. Н. Красовский. — М.: Физматгиз, 1959. — 211 с.

12. Красовский Н. Н. Проблемы стабилизации управляемых движений: дополнение к книге И. Г. Малкина “Теория устойчивости движения” / Н. Н. Красовский. — М.: Наука, 1965. — 532 с.

13. Красовский Н.Н. Теория управления движением / Н.Н. Красовский. — М.: Наука, 1968. — 476 с.

14. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения / А. М. Ляпунов. — М.; Л.: ОНТИ, 1935. — 386 с.

15. Марквардт Н. Г. Контактная сеть / Н. Г. Марквардт, И. И. Власов — М.: Машиностроение, 1978. — 325 с.

16. Меркин Д. Р. Введение в теорию устойчивости движения / Д. Р. Меркин. — М: Наука, 1976. — 320 с.

17. Немыцкий В. В. Качественная теория дифференциальных уравнений / В. В. Немыцкий, В. В. Степанов. — М.; Л.: Гостехиздат, 1947. — 448 с.

18. Пантелеев А. В. Обыкновенные дифференциальные уравнения: практический курс / А. В. Пантелеев, А. С. Якимова, К. А. Рыбаков. — М.: Логос, 2010. — 384 с.

19. Самойленко А. М. Дифференциальные уравнения в примерах и задачах / А. М. Самойленко, С. А. Кривошея, Н. А. Перестюк. — Киев: Вища школа, 1984. — 408 с.

20. Фурасов В. Д. Устойчивость движения, оценки и стабилизация / В. Д. Фурасов. — М.: Наука, 1977. — 247 с.

21. Халанай А. Качественная теория импульсных систем / А. Халанай, Д. Векслер. — М.: Мир, 1971. — 312 с.

22. Шолохович Ф. А. Лекции по дифференциальным уравнениям / Ф. А. Шолохович. — Екатеринбург: Урал. изд-во, 2005. — 232 с.

23. Эльсгольц Л. Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление / Л. Э. Эльсгольц. — М.: Наука, 1969. — 424 с.

24. Эльсгольц Л. Э. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом / Л.Э. Эльсгольц, С.Б. Норкин. — М.: Наука, 1971. — 296 с.

25. Kim A. V. Time-Delay System Toolbox (for Use with MATLAB) / A. V. Kim, W. H. Kwon, V. G. Pimenov — Beta Version, Korea, Seul: Seul National University, 1998.

26. Ockendon J. The dinamics on a current collection system for an electric locomotive / J. Ockendon J., A. Tailor. — London: Proc. Roy. Soc., Ser A, 322(1971). — P. 447—468.

Учебное издание

Гребенщиков Борис Георгиевич
Гредасова Надежда Викторовна
Ложников Андрей Борисович
Матвийчук Оксана Георгиевна
Сесекин Александр Николаевич

УСТОЙЧИВОСТЬ И ОПТИМАЛЬНАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Редактор *О. С. Смирнова*

Компьютерная верстка *Б. Г. Гребенщикова, А. Н. Сесекина*

Подписано в печать 04.08.2016.		Формат 70x100 1/16.
Бумага писчая.	Плоская печать.	Усл. печ. л. 9,7.
Уч.-изд. л. 6,5.	Тираж 70 экз.	Заказ № 225.

Издательство Уральского университета
Редакционно-издательский отдел ИПЦ УрФУ
620049, Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 5
Тел.: 8 (343) 375-48-25, 375-46-85, 374-19-41
E-mail: rio@urfu.ru

Отпечатано в Издательско-полиграфическом центре УрФУ
620075, Екатеринбург, ул. Тургенева, 4
Тел.: 8 (343) 350-56-64, 350-90-13
Факс: 8 (343) 358-93-06
E-mail: press-urfu@mail.ru

ЛИДЕР УНИВЕРСИТЕТСКОГО КНИГОИЗДАНИЯ
УНИВЕРСИТЕТСКАЯ КНИГА
2015

9 785799 617912